ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9 КЛАССА

Задание 1 - «Одним росчерком».

На рисунке 1 представлено шестнадцать точек, которые необходимо соединить шестью отрезками в замкнутую ломаную, не отрывая ручки от листа бумаги. Укажите последовательность проведения таких отрезков.

Примечание: представленные точки могут не быть концами отрезков.

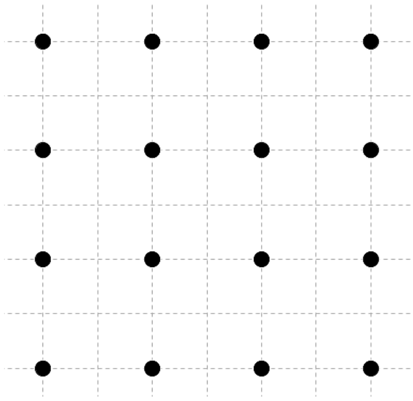


Рисунок 1

Баллы	Критерии (9 класс)
1	Точки соединены, но большим количеством отрезков.
3	Представлен верный ответ, но не показана последовательность проведения отрезков.
5	Представлен верный ответ и показана последовательность проведения отрезков.

Решение.

На рисунке 2 представлен один из возможных вариантов.

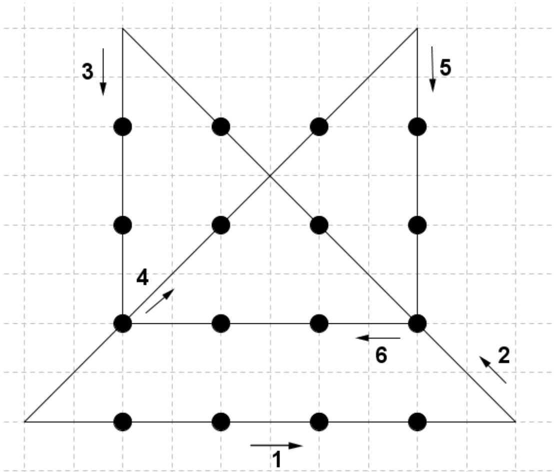


Рисунок 2

Задание 2 - «Художник и математик».

Одной из математических задач, в решении которой существенную роль сыграли компьютерные средства, является задача о четырех красках: требуется раскрасить географическую карту минимальным количеством цветов так, чтобы две страны, имеющие общую границу, были окрашены по-разному. В 1852 году Френсис Гутри, составляя карту графств Англии, предположил, что для этого достаточно четырех красок. Для доказательства этой гипотезы карту представили в виде графа. Граф – это множество точек (вершин графа) и соединяющих их отрезков (ребер графа).

Государства (области карты) представляют вершинами графа, а общие границы государств – ребрами графа.

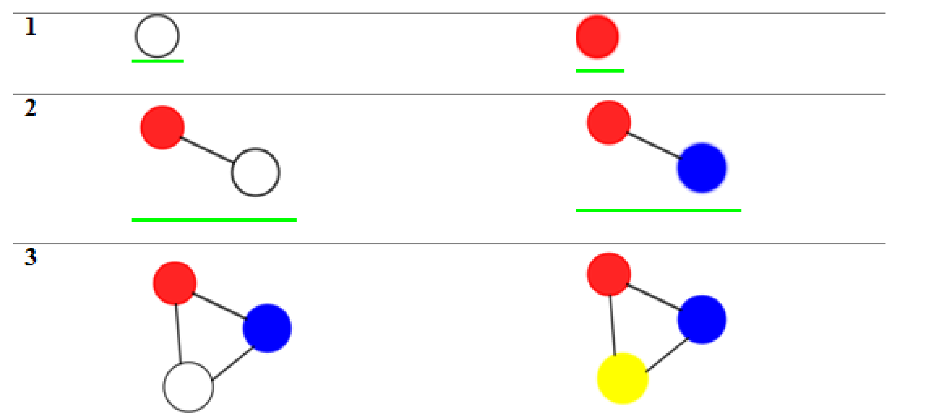
Одним из первых результатов решения этой задачи, которые были получены компьютерными средствами, является доказательство гипотезы о четырех красках, сформулированной Френсис Гутри в 1852 году. Гипотеза утверждает, что для правильной раскраски любой карты достаточно четырех красок. Поясним, что карта называется правильно раскрашенной, если всякие две области, имеющие общую границу, окрашены разными цветами. Для доказательства карту представили в виде графа, т.е. набора точек (вершин графа) и соединяющих их отрезков (ребер графа). Вершины графа представляют области карты, ребра графа – общие границы областей карты.

Некто придумал игру «Художник и математик». Правила игры следующие: художник получает краски, математик – ручку и лист бумаги.

1. Математик рисует на листе бумаги небольшой круг (вершину графа). Художник раскрашивает его в любой цвет.
2. Математик рисует следующий круг и при этом может соединить его отрезком (ребром графа) с ранее нарисованным кругом (или несколькими кругами). Художник раскрашивает добавленный круг с соблюдением условий: если круг не соединен ребрами с другими кругами, то можно использовать любой цвет; если круги соединены ребром, то должны быть окрашены в разные цвета.
3. Игра продолжается до тех пор, пока художнику хватает 4 цветов для окрашивания вершин графа.

В таблице представлены 3 первых шага этой игры.

Математик	Художник



Вопрос 1. Может ли игра закончится выигрышем математика? Если да, то представьте ход игры до победы математика.

Вопрос 2. Если пункт 3 правил игры будет звучать так: «Игра продолжается до тех пор, пока художнику хватает 5 цветов для окрашивания кружочков», то существует ли выигрышная стратегия для математика?

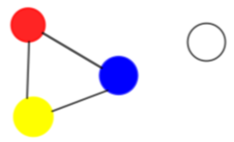
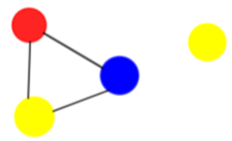
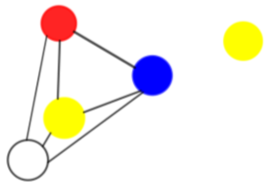
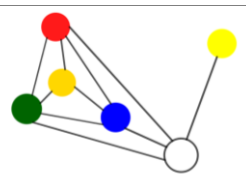
Вопрос 3. Если вы нашли выигрышные стратегии для математика, то как вы объясните, почему теорема о четырех красках в этом случае не работает?

Баллы	Критерии (9 класс)
3	Дан верный ответ на вопрос 1, он представлен описанием стратегии или последовательностью изображений, соответствующих ходам игроков до победы математика или даже одним правильным изображением последней ситуации. Ответы на остальные вопросы отсутствуют или неверны.
6	Дан верный, обоснованный ответ на два вопроса из трех.
10	Даны верные, обоснованные ответы на все три вопроса.

Решение.

Вопрос 1. Может ли игра закончится выигрышем математика? Если да, то представьте ход игры до выигрыша математика.

Ответ: ход игры представим в виде таблицы:

№	Математик	Художник
4		
5		
6		Игра закончена

Вопрос 2. Если пункт 3 правил игры будет звучать так: «Игра продолжается до тех пор, пока художнику хватает 5 цветов для окрашивания кругов», то существует ли выигрышная стратегия для математика?

Ответ: для получения выигрышной ситуации математику нужно создать еще одну запасную конструкцию из четырех цветов, чтобы сделать доступными для связей все 5 цветов. Затем создать вершину, связанную со всеми пятью цветами, пример представлен на рисунке 3.

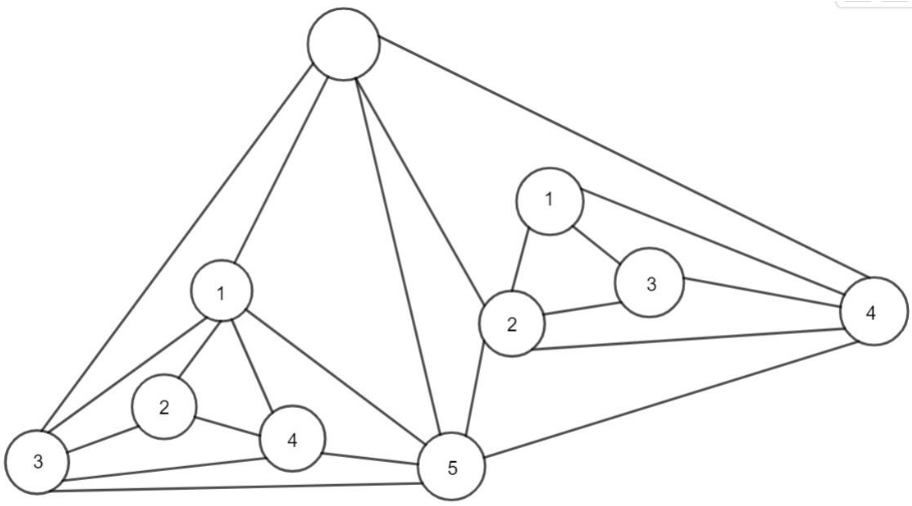


Рисунок 3

Вопрос 3. Если вы нашли выигрышные стратегии для математика, то как вы объясните, почему теорема о четырех красках в этом случае не работает?

Ответ: теорема о четырех красках справедлива для готовой карты. При постепенном дополнении карты новыми элементами (вершинами и ребрами графа) математик может вынуждать художника использовать все новые и новые цвета.

Задание 3.

Разрежьте прямоугольник на части, как представлено на рисунке 4. Составьте из полученных частей квадрат. Обоснуйте правильность построений.

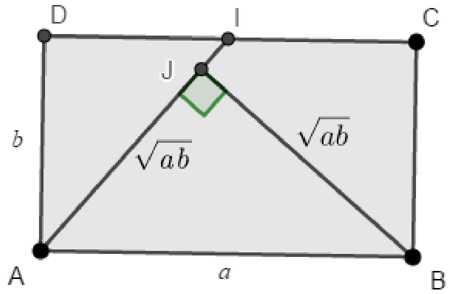


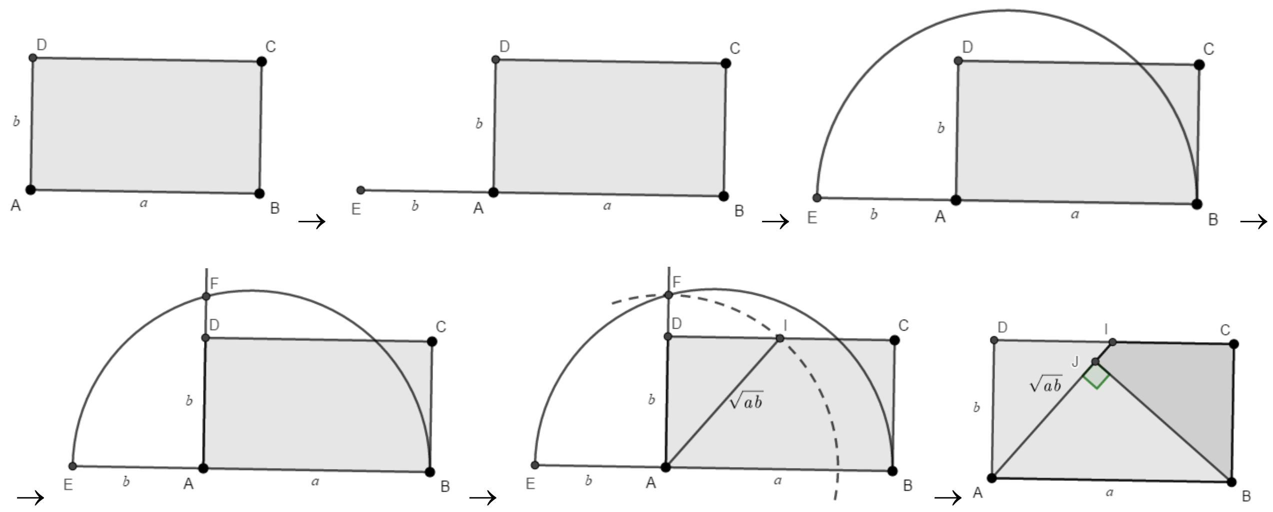
Рисунок 4

Баллы	Критерии (9 класс)
3	Представлено решение головоломки без обоснования правильности построений.
6	Представлено решение головоломки, обоснование построения неполное.
10	Представлено решение с полным обоснованием построений.

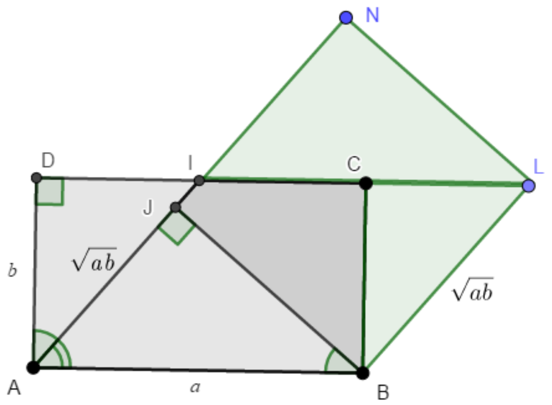
Построение линий разреза основано на стандартном алгоритме построения отрезка, равного среднему геометрическому двух других отрезков.

1) Построить прямоугольник $ABCD$ со сторонами a и b.
2) На прямой AB отложим отрезок AE, равный b.
3) Построим полуокружность по двум точкам B и E.
4) Отмечаем точку F – пересечение луча AD и полуокружности. $AF = \sqrt{ab}$.
5) Построим точку I = Окр(A, AE) $\cap$ DC.
6) Строим $BJ \perp AI$. Отрезки AI и BJ – искомые линии разреза прямоугольника.

Последовательность действий в картинках:



Трансформация из прямоугольника квадрата получается путем переноса треугольника ADI право на вектор AB, и треугольника ABJ вверх на вектор AI.



Докажем, что $BJNL$ – квадрат.

1) $JN \parallel BL$ и $BJ \parallel LN$, значит $BJNL$ – параллелограмм.
2) В ΔADI $\cos A = b / \sqrt{ab}$.
3) В ΔABJ $\cos B = BJ / a$.
4) $\angle A = \angle B$, так как $\angle A + \angle BAJ = \angle B + \angle BAJ = 90°$.
5) Из 2-4 получаем: $b / \sqrt{ab} = BJ / a$, откуда $BJ = ab / \sqrt{ab} = \sqrt{ab}$.
6) По свойствам переноса $NL = BJ = \sqrt{ab}$, $BL = AI = \sqrt{ab}$.
7) $\angle NJB$ – прямой и $BL = NL$. Следовательно, $BJNL$ – квадрат.

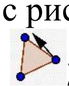
Задание 4 – «Анимация головоломки».

Постройте в GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) динамически устойчивые части головоломки, представленной в задании 3, так, чтобы их можно было перемещать. Опишите алгоритм построения.

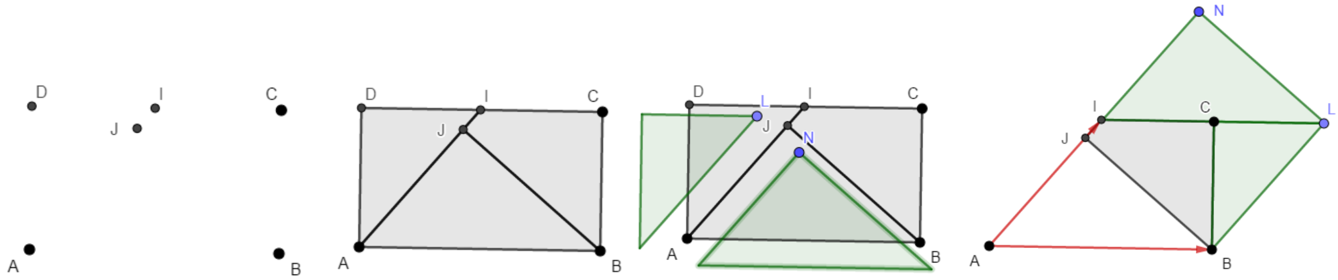
Баллы	Критерии (9 класс)
1	Построена модель головоломки, представленной в задании 3, но нет возможности перемещать её части.
5	Построена модель головоломки, представленной в задании 3, есть возможность перемещать её части, но не все свойства являются динамически устойчивыми.
10	Построена правильная динамически устойчивая модель головоломки, представленной в задании 3.
20	Построена правильная динамически устойчивая модель головоломки, представленной в задании 3, описаны шаги ее построения.

Решение. Алгоритм построения линий разрезов описан в задаче 3.

Алгоритм построения динамически устойчивых частей головоломки:

1) Скрыть прямоугольник.
2) Построить с помощью инструмента Многоугольник два треугольника и четырёхугольник в соответствии с рисунком 4.
3) Выбрать инструмент  Жёсткий многоугольник. Щёлкнуть по каждому из треугольников. Получатся точные копии треугольников, которые можно перетаскивать и вращать вокруг одной из его вершин. При этом при изменении размеров исходного треугольника, размеры жёсткого треугольника тоже будут изменены.
4) Переместить копии треугольников на векторы AB и AI.

Последовательность действий в картинках:

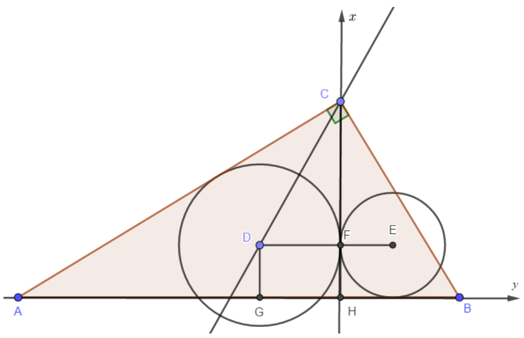


Задание 5. *(Задача предложена Р. Николаевым).*

Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CH. В углы ACH и CHB вписаны касающиеся друг друга окружности. В каком отношении точка касания этих окружностей делит высоту CH, если произведение их радиусов наибольшее. Ответ обоснуйте.

Баллы	Критерии (9 класс)
5	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Не найдено верного положения точки касания окружностей.
10	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге. Ответ к задаче найден экспериментально: определено положение точки касания, при котором произведение радиусов окружности является наибольшим. Например, на монитор выведено значение площади прямоугольника *DFHG*.
15	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге. Рассмотрена геометрическая конструкция, исследование которой может привести к верному решению задачи. Например, подобные треугольники или координаты точки, лежащей на прямой.
20	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге. Рассмотрена геометрическая конструкция, исследование которой не доведено до конца. Например, получена формула для вычисления произведения радиусов, но не исследуются свойства соответствующей ей функции.
25	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге. Рассмотрена геометрическая конструкция, исследование которой доведено до конца, но получен неверный ответ.
30	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге. Рассмотрена геометрическая конструкция, исследование которой доведено до конца, получен верный ответ.

Решение.



Способ 1

Введём систему координат с центром в точке H – основании высоты ΔABC, оси направим вдоль гипотенузы AB и высоты CH.

Пусть $CH = b$. Тогда уравнение биссектрисы CD будет иметь вид: $y = kx + b$. Координаты точки $D(-R; r) = (x; kx + b)$.

Искомое произведение

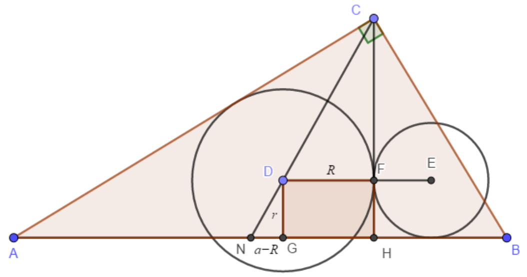
$$S = Rr = -x(kx + b) = -kx^2 - bx.$$

Графиком функции $S(x)$ является парабола, ветви которой направлены вниз и своё наибольшее значение функция принимает в вершине параболы:

$$x_{вершины} = -\frac{b}{2k},$$

$$y_{вершины} = k \cdot \left(-\frac{b}{2k}\right) + b = \frac{b}{2}$$

Ответ: точка касания окружностей делит высоту *CH* пополам.



Способ 2

Рассмотрим ΔCHN, пусть $CH = b$, $NH = a$.

1) ΔCHN и ΔDGN – подобные (по двум углам).
2) Из подобия треугольников следует, что
$$a - R = \frac{ar}{b}, \text{откуда } R = a - \frac{ar}{b}.$$
3) Искомое произведение

$$S = Rr = \left(a - \frac{ar}{b}\right) r = -\frac{ar^2}{b} + ar.$$

Графиком функции *S(r)* является парабола, ветви которой направлены вниз и своё наибольшее значение функция принимает в вершине параболы:

$$r_{вершины} = \frac{-a}{-2 \cdot \frac{a}{b}} = \frac{b}{2}.$$

Ответ: точка касания окружностей делит высоту *CH* пополам.

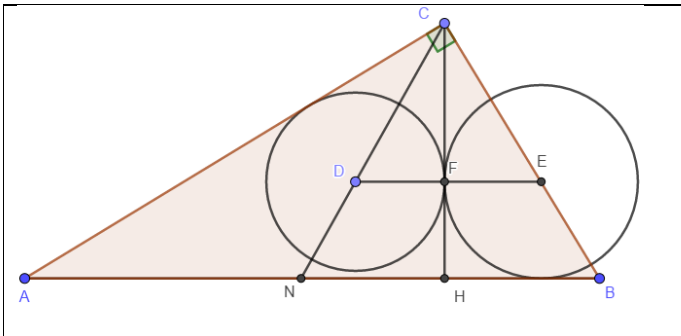
Задание 6.

Изменяя чертеж к заданию №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки задач запишите либо на листе бумаги, либо в графическом окне GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Оценивается каждая составленная задача отдельно. Баллы суммируются.

Баллы	Критерии (9 класс)
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5.
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная.
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5.
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа.

Примеры задач:



Задача 1. Из вершины прямого угла *C* треугольника *ABC* проведена высота *CH*. В углы *ACH* и *CHB* вписаны касающиеся друг друга окружности. В каком отношении точка касания этих окружностей делит высоту *CH*, если центр окружности, вписанный во второй треугольник, лежит на стороне *BC*. Ответ обоснуйте.

Задача 2. Из вершины прямого угла *C* треугольника *ABC* проведена высота *CH*. В углы *ACH* и *CHB* вписаны касающиеся друг друга окружности. В каком отношении точка касания этих окружностей делит высоту *CH*, если радиусы вписанных окружностей равны. Ответ обоснуйте.