ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

Задание 1 - «Одним росчерком».

На рисунке 1 представлено девять точек, которые необходимо соединить четырьмя отрезками, не отрывая ручки от листа бумаги. Укажите последовательность проведения таких отрезков.

Примечание: представленные точки могут не быть концами отрезков.

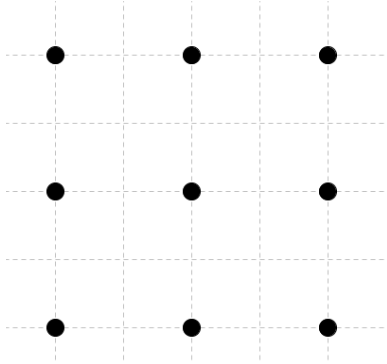


Рисунок 1

Баллы	Критерии (7 класс)
1	Точки соединены, но большим количеством отрезков.
3	Представлен верный ответ, но не показана последовательность проведения отрезков.
5	Представлен верный ответ и показана последовательность проведения отрезков.

Решение.

На рисунке 2 представлен один из возможных вариантов.

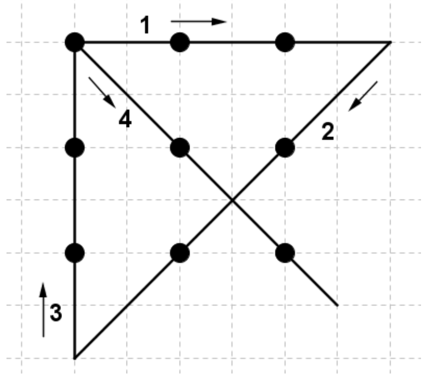


Рисунок 2

Задание 2 - «Художник и математик».

Одной из математических задач, в решении которой существенную роль сыграли компьютерные средства, является задача о четырех красках: требуется раскрасить географическую карту минимальным количеством цветов так, чтобы две страны, имеющие общую границу, были окрашены по-разному. В 1852 году Френсис Гутри, составляя карту графств Англии, предположил, что для этого достаточно четырех красок. Для доказательства этой гипотезы карту представили в виде графа. Граф – это множество точек (вершин графа) и соединяющих их отрезков (ребер графа). Государства (области карты) представляют вершинами графа, а общие границы государств – ребрами графа.

Одним из первых результатов решения этой задачи, которые были получены компьютерными средствами, является доказательство гипотезы о четырех красках, сформулированной Френсис Гутри в 1852 году. Гипотеза утверждает, что для правильной раскраски любой карты достаточно четырех красок. Поясним, что карта называется правильно раскрашенной, если всякие две области, имеющие общую границу, окрашены разными цветами. Для доказательства карту представили в виде графа, т.е. набора точек (вершин графа) и соединяющих их отрезков (ребер графа). Вершины графа представляют области карты, ребра графа – общие границы областей карты.

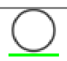
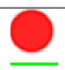
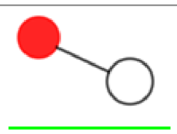
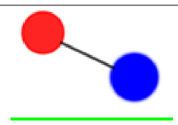
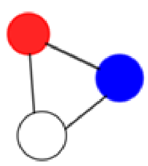
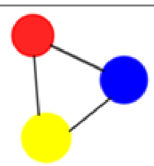
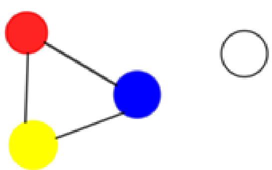
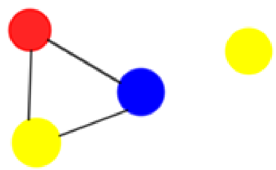
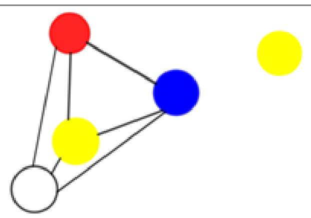
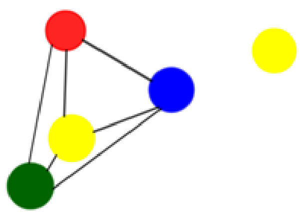
Некто придумал игру «Художник и математик». Правила игры следующие: художник получает краски, математик – ручку и лист бумаги.

1. Математик рисует на листе бумаги небольшой круг (вершину графа). Художник раскрашивает его в любой цвет.

2. Математик рисует следующий круг и при этом может соединить его отрезком (ребром графа) с ранее нарисованным кругом (или несколькими кругами). Художник раскрашивает добавленный круг с соблюдением условий: если круг не соединен ребрами с другими кругами, то можно использовать любой цвет; если круги соединены ребром, то должны быть окрашены в разные цвета.

3. Игра продолжается до тех пор, пока художнику хватает 4 цветов для окрашивания вершин графа.

В таблице представлено 5 шагов игры.

Математик	Художник
1 	
2 	
3 	
4 	
5 	

Вопрос 1. Где должен нарисовать шестую вершину графа математик и какие ребра из нее провести, чтобы на шестом шагу художник проиграл?

Вопрос 2. Почему теорема четырех красках не работает в такой игре?

Баллы	Критерии (7 класс)
3	Дан верный ответ на вопрос 2 (указано, что причина в том, что карта не дана в готовом виде, а дополняется по ходу игры новыми вершинами и ребрами графа), но этот вывод не обоснован ни общим описанием стратегии, ни примерами изображений. Ответ на 1 вопрос отсутствует или неверен.
6	Дан верный ответ на вопрос 1 текстом или изображением (представлено изображение нового круга, связанного с синим, красным, зеленым и желтым кругами, все ребра графа не пересекаются). Ответ на вопрос 2 отсутствует или неверен.
10	Даны верные ответы на оба вопроса задачи. Ответ на вопрос 1 может быть представлено изображение нового круга, связанного с синим, красным, зеленым и желтым кругами, все ребра графа не пересекаются. Ответ на вопрос 2 содержит указания на основную причину – математик расставляет круги и устанавливает связи постепенно, в соответствии с выбором цвета художником или показана раскраска того же графа в 4 цвета.

Решение.

Вопрос 1. Где должен нарисовать шестую вершину графа математик и какие ребра из нее провести, чтобы на шестом шагу художник проиграл?

Ответ на 1 вопрос можно представить в виде рисунка 2.

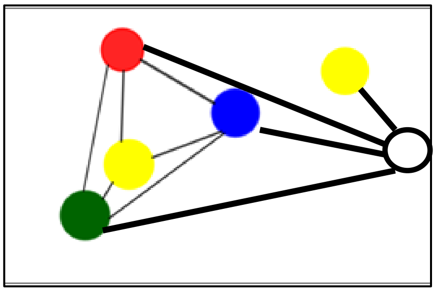


Рисунок 2

Вопрос 2. Почему теорема четырех красок не работает в такой игре?

Ответ: теорема о четырех красках справедлива для готовой карты. При постепенном дополнении карты новыми элементами (вершинами и ребрами графа) математик на четвертом шагу создает несвязную вершину. Есть два варианта развития событий: 1) художник окрашивает её в один из использованных цветов; 2) художник окрашивает его в четвертый цвет.

Вариант 1. Художник выбирает один из использованных цветов на четвертом шагу. На пятом шагу математик создает новую вершину, требующую использования четвертого цвета (связывая ее с тремя предыдущими). Художник вынужден использовать четвертый цвет. На шестом шагу он создает вершину, которую связывает с четырьмя вершинами разных цветов. Так он вынуждает художника использовать пятый цвет.

Вариант 2. Художник окрашивает новую вершину в четвертый цвет. На 5 шагу математик создает новую вершину, которая связана с четырьмя предыдущими. Так он вынуждает художника использовать пятый цвет.

Задание 3 – «Головоломка».

Разрежьте квадрат на части, как представлено на рисунке 3. Составьте из полученных частей как можно больше геометрических фигур разной формы. В ответе представьте рисунки составленных геометрических фигур и их описание.

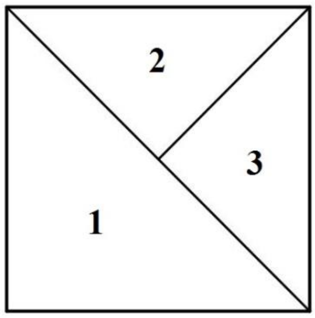


Рисунок 3

Баллы	Критерии (7 класс)
3	Представлен рисунок только одной составленной фигуры.
6	Представлены рисунки не более 4 видов составленных геометрических фигур.
10	Представлены рисунки более 4 видов составленных геометрических фигур: треугольник, четырехугольники (прямоугольник, параллелограмм, трапеция) и некоторые многоугольники (пяти-, шести-, семи-, восьми- и девятиугольник). И даны их описания.

Решение.

Из полученных частей головоломки можно составить:

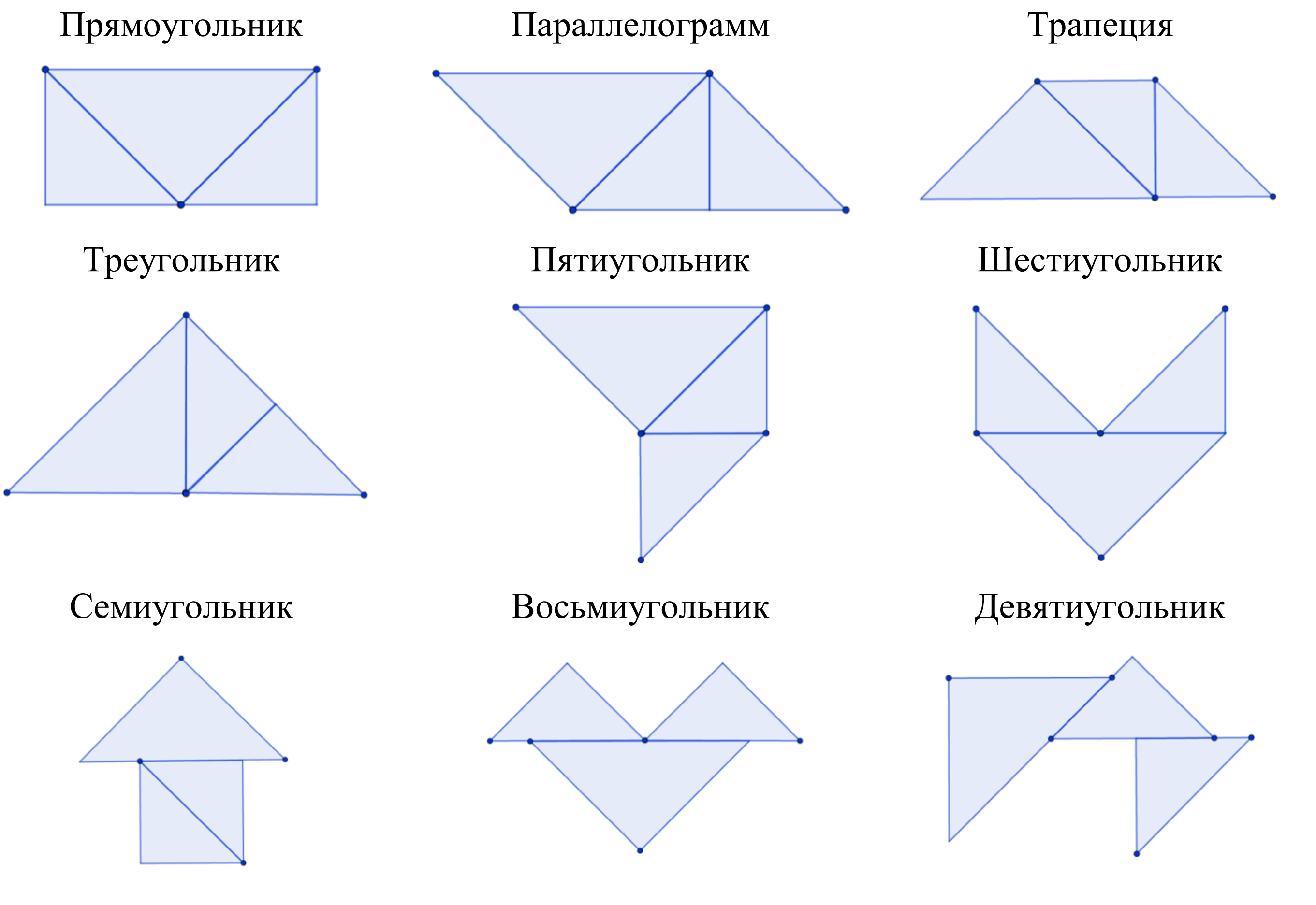


Рисунок 4

Задание 4 – «Анимация головоломки».

Постройте в GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) динамически устойчивые части головоломки, представленной в задании 3, так, чтобы их можно было перемещать. Опишите алгоритм построения.

Баллы	Критерии (7 класс)
1	Построена модель головоломки, представленной в задании 3, но нет возможности перемещать её части.
3	Построена модель головоломки, представленной в задании 3, есть возможность перемещать её части, но при этом использован инструмент Жесткий многоугольник.
5	Построена модель головоломки, представленной в задании 3, есть возможность перемещать её части, но не все свойства являются динамически устойчивыми.
10	Построена правильная динамически устойчивая модель головоломки, представленной в задании 3.
20	Построена правильная динамически устойчивая модель головоломки, представленной в задании 3, описаны шаги ее построения.

Решение.

Один из вариантов построения 1 части головоломки (рисунок 4):

1) Построить отрезок AB с фиксированной длиной.
2) Построить через точку A перпендикулярную прямую к отрезку AB.
3) Построить окружность с центром в точке A и радиусом AB.
4) Построить одну из точек пересечения окружности и прямой (точку C).
5) С помощью инструмента Многоугольник построить треугольник ABC.

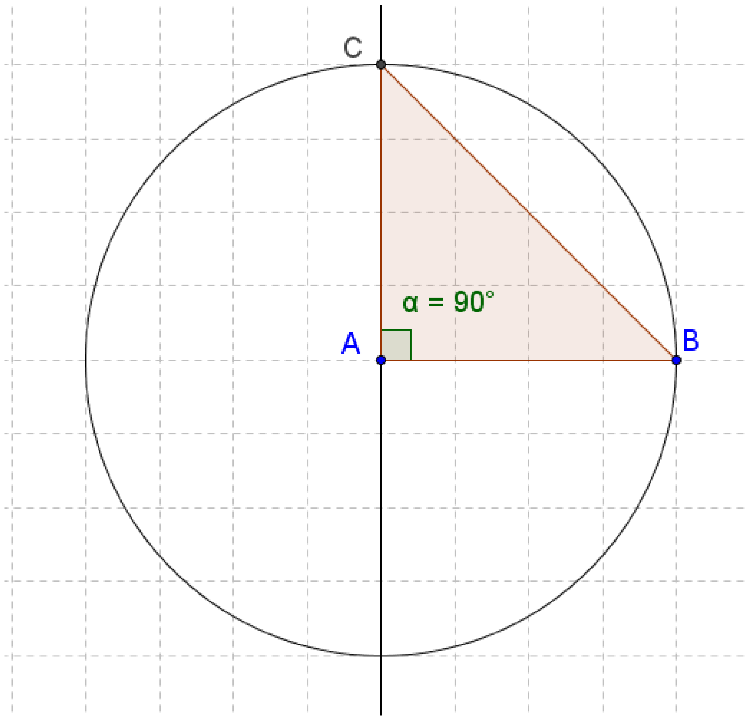


Рисунок 4

Один из вариантов построения 2 части головоломки (рисунок 5):

1) Построить отрезок с фиксированной длиной равной длине отрезка AB.
2) С помощью инструмента Угол заданной величины построить углы EDE′ и DED′ по 45° по одну сторону от прямой DE.
3) Построить лучи DE′ и ED′.

4) Построить точку пересечения этих лучей (точка F).
5) С помощью инструмента многоугольник построить треугольник DEF.

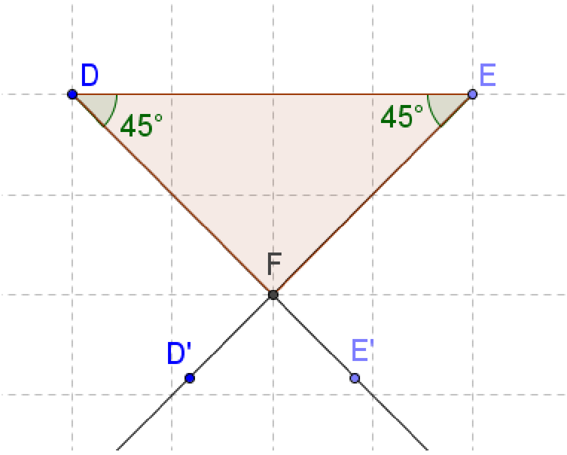
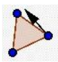


Рисунок 5

Аналогично можно построить 3 часть головоломки.

Второй вариант построения головоломки, изображенной на рисунке 3 (*предложено Овчинниковой Р.П.*):

1) Построить квадрат с помощью инструмента Правильный многоугольник.
2) Построить его диагональ.
3) Отметить середину диагонали и построить половину второй диагонали.
4) Скрыть квадрат.
5) Построить с помощью инструмента Многоугольник три треугольника в соответствии с рисунком 3.
6) Выбрать инструмент  Жёсткий многоугольник. Щёлкнуть по каждому из трёх треугольников. Получатся точные копии треугольников, которые можно перетаскивать и вращать вокруг одной из его вершин.

Последовательность действий в картинках (рисунок 6):

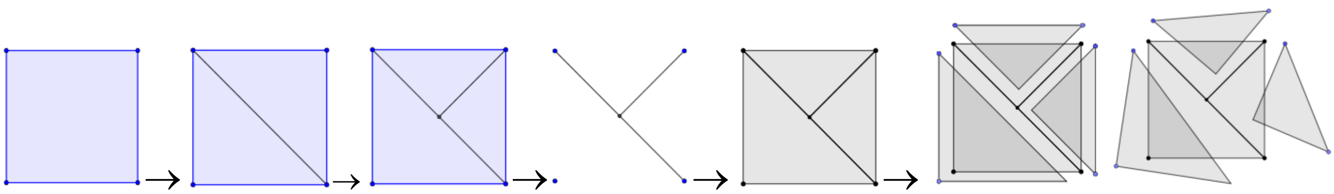


Рисунок 6

Задание 5. *(Задача предложена А.И. Сгибневым).*

Постройте отрезок AB и прямую CD, которая его пересекает. На прямой CD отметьте точку E, так чтобы её можно было перемещать только по этой прямой. Соедините точки A, B и E в треугольник. Выведите на экран длины трёх его сторон. Найдите как можно больше положений точки E на прямой CD, при которых треугольник ABE является равнобедренным. Объясните, как построить эти положения точки E с помощью циркуля и линейки.

Баллы	Критерии (7 класс)
5	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Не найдено ни одного верного положения точки E на прямой CD, при которых треугольник ABE является равнобедренным.
10	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Найдено одно положение точки E на прямой CD, при котором треугольник ABE является равнобедренным.
15	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Найдены более одного, но не все положения точки E на прямой CD, при котором треугольник ABE является равнобедренным. или Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Найдено одно положение точки E на прямой CD, при котором треугольник ABE является равнобедренным. При этом дано описание, как построить это положение точки E с помощью циркуля и линейки.
20	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Найдены все положения точки E на прямой CD, при котором треугольник ABE является равнобедренным.
30	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Найдены все положения точки E на прямой CD, при котором треугольник ABE является равнобедренным. Дано описание, как построить эти положения точки E с помощью циркуля и линейки.

Решение.

Эксперимент показал 5 вариантов расположения точки E (рисунок 7):

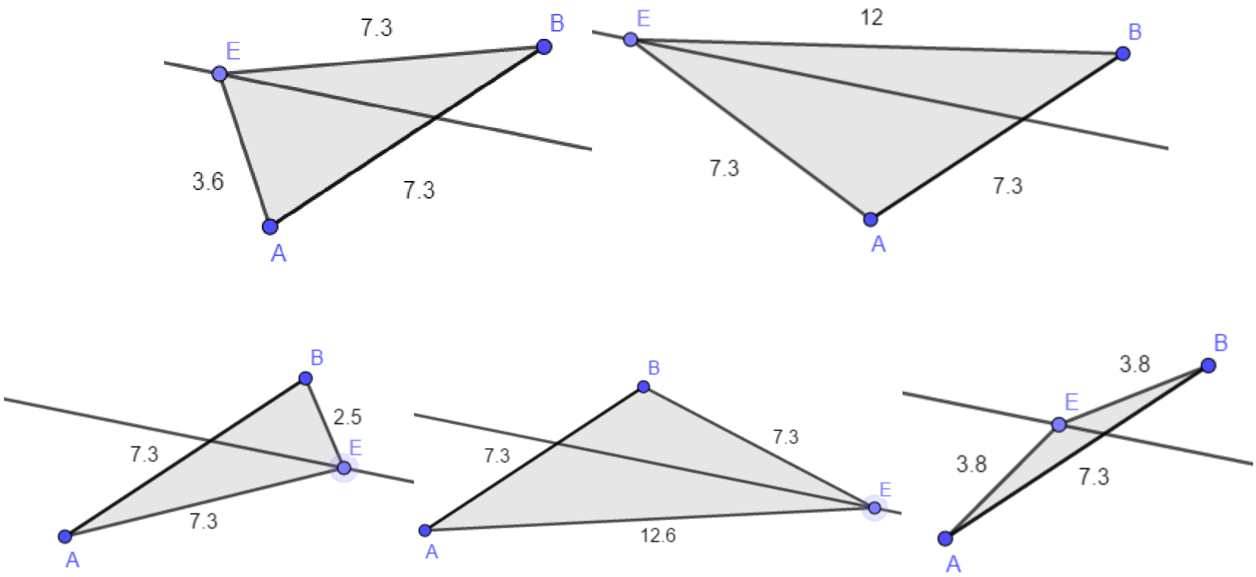


Рисунок 7

Других вариантов нет, так как треугольник может быть равнобедренным при фиксированной длине отрезка AB, если AB = BE или AB=AE, при этом точка E может быть расположена по разные стороны от прямой AB. Получили 4 варианта. Пятый вариант возможен при AE=BE.

Построение в случае 1-4 (см. рис. 8):

1) Построить окружность O_1 (A, r = AB).
2) Отметить точки E_1 и E_2 как AB $\cap$ окр. O_1.
3) Построить окружность O_2 (A, r = AB).
4) Отметить точки E_3 и E_4 как AB $\cap$ окр. O_2.

Построение в случае 5:

1) Построить серединный перпендикуляр m к отрезку AB.
2) Построить точку E = AB $\cap$ m.

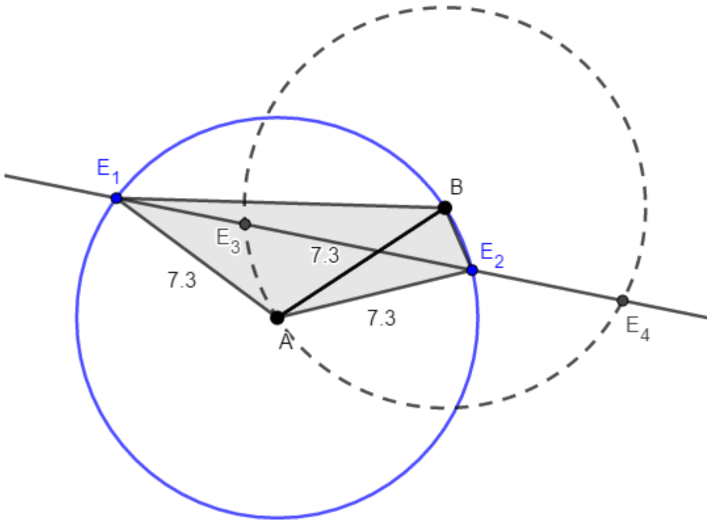


Рисунок 8

Замечание: если отрезок AB и прямая CD перпендикулярны, то в пятом случае прямые AB и m будут параллельны. Тогда количество решений равно 4. Если прямая CD к тому же проходит через середину отрезка AB, то количество вариантов решения равно 2 (рис. 9).

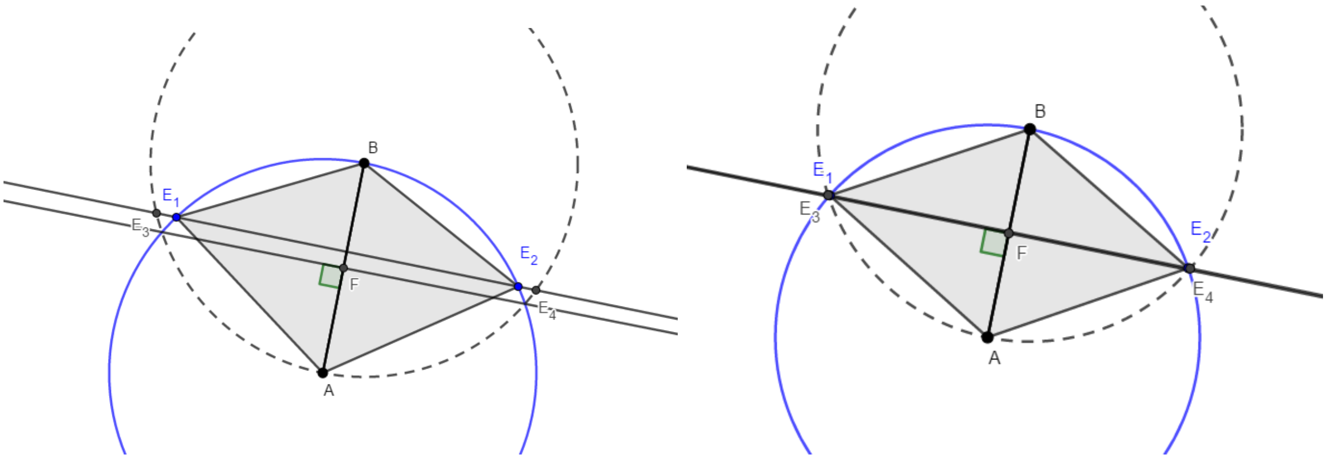


Рисунок 9

Задание 6.

Изменяя чертеж к заданию №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки задач запишите либо на листе бумаги, либо в графическом окне GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Оценивается каждая составленная задача отдельно. Баллы суммируются.

Баллы	Критерии (7 класс)
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5.
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная.
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5.
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа.

Примеры формулировок:

1. Дан отрезок АВ и прямая CD, которая его **не** пересекает. На прямой CD отмечена точка Е. Найдите как можно больше положений точки Е на прямой CD, при которых треугольник АВЕ является равнобедренным. Объясните, как построить эти положения точки Е с помощью циркуля и линейки. **Сколько решений имеет задача в зависимости от взаимного расположения отрезка и прямой?**
2. **Дан отрезок АВ и прямая CD.** На прямой CD отмечена точка Е. Найдите как можно больше положений точки Е на прямой CD, при которых треугольник АВЕ является **прямоугольным**. Объясните, как построить эти положения точки Е с помощью циркуля и линейки. **Сколько решений имеет задача в зависимости от взаимного расположения отрезка и прямой?**
3. Дан отрезок АВ и прямая CD, которая его **не** пересекает. На прямой CD отмечена точка Е. Найдите положения точки Е на прямой CD, при которых треугольник АВЕ является **прямоугольным, остроугольным, тупоугольным**. Объясните, как найти эти положения точки Е путем построения с помощью циркуля и линейки.