

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 5-6 КЛАССОВ

Задание 1 - «Одним росчерком».

На рисунке 1 представлено шесть точек, которые необходимо соединить четырьмя отрезками, не отрывая ручки от листа бумаги, чтобы получилась замкнутая ломаная. Укажите, в какой последовательности проведены отрезки.

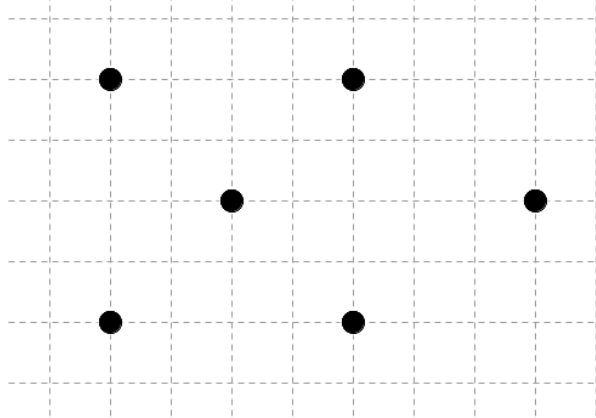


Рисунок 1

| Баллы | Критерии (5-6 классы) |
|-------|---|
| 1 | Точки соединены большим количеством отрезков, но полученная ломаная не является замкнутой. |
| 3 | Все точки соединены четырьмя отрезками непрерывной замкнутой ломаной, но не указана последовательность построения отрезков. |
| 5 | Все точки соединены четырьмя отрезками непрерывной замкнутой ломаной. Указана последовательность построения отрезков. |

Решение.

На рисунке 2 представлены два из возможных вариантов построения замкнутой ломаной, состоящей из 4 отрезков.

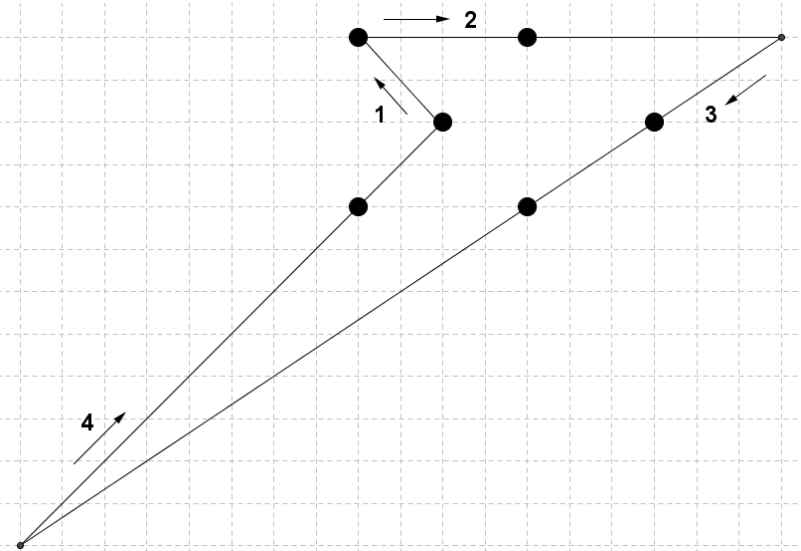
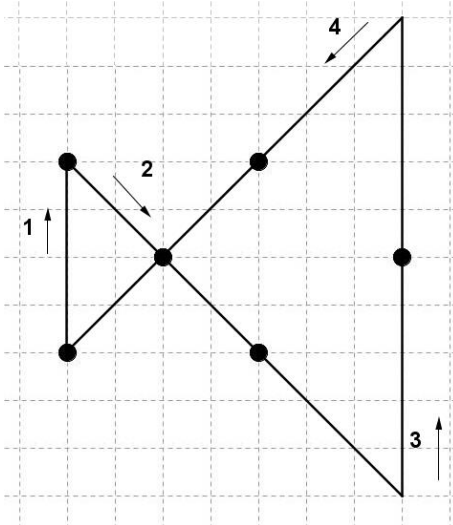


Рисунок 2

Задание 2.

Какое минимальное число различных цветов нужно для раскрашивания карты, представленной на рисунке 3, если любые две области с общим участком границы должны быть разного цвета? Подтвердите свой ответ примером раскраски данной карты.

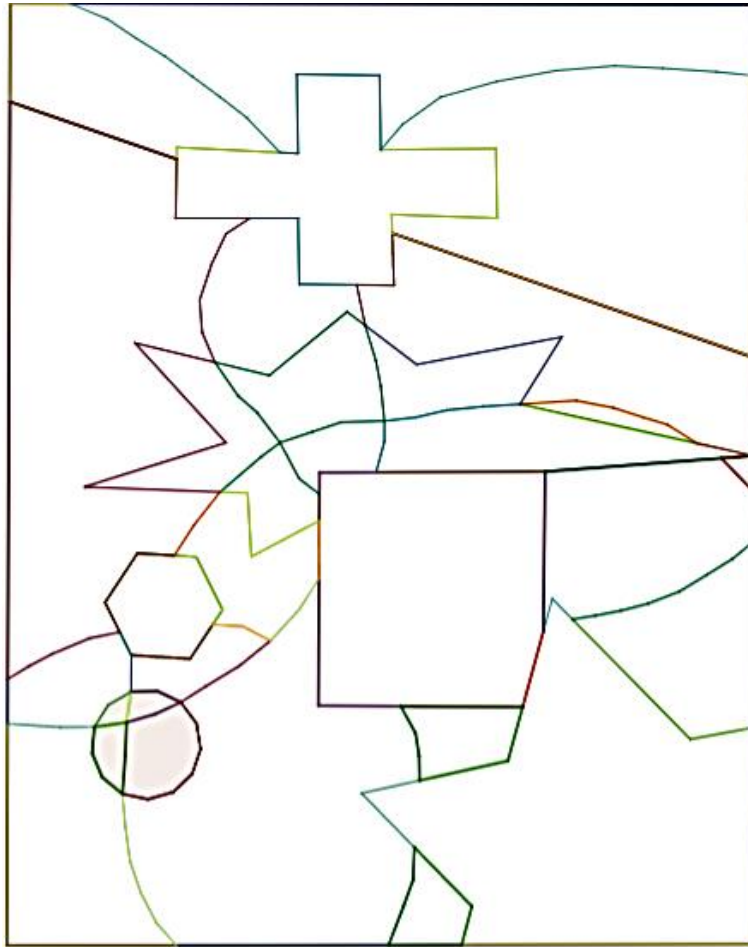


Рисунок 3

| Баллы | Критерии (5-6 класс) |
|-------|---|
| 1 | Представлен пример раскраски карты, но при этом использовано более чем 4 цвета. |
| 5 | Дан верный ответ, но в раскраске карты есть ошибки. |
| 10 | Дан верный ответ и представлена раскраска карты в 4 цвета. |

Решение.

Для раскраски любой карты так, чтобы две области, имеющие общую границу, были окрашены по-разному, достаточно четырех красок. Эта гипотеза была выдвинута в 1852 году Френсис Гутри, а доказана только в 1976 году с помощью компьютерных средств.

Пример раскраски данной в задании карты представлен на рисунке 4.

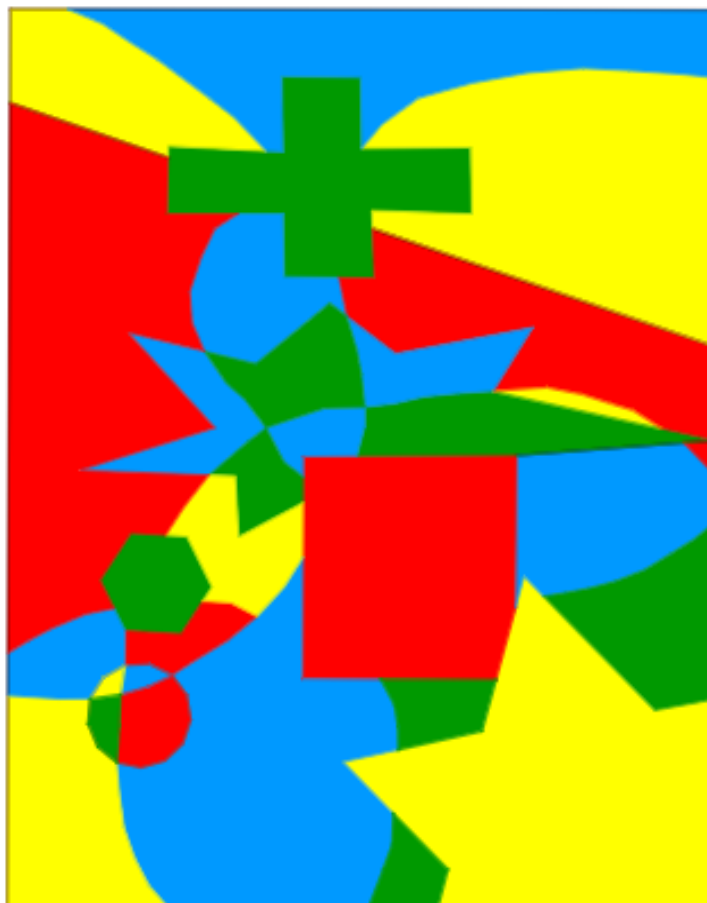


Рисунок 4

Задание 3.

Разрежьте представленную на рисунке 5 фигуру на 2 части так, чтобы из полученных частей можно было составить квадратную рамку. Отверстие внутри рамки тоже должно иметь квадратную форму. Найдите площадь полученной рамки и сравните её с площадью исходной фигуры, считая клетку за одну квадратную единицу.

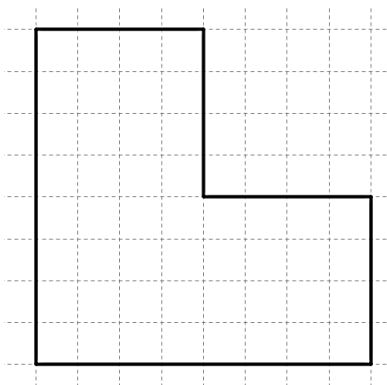


Рисунок 5

| Баллы | Критерии (5-6 классы) |
|-------|---|
| 3 | Представлен один способ разрезания фигуры, площади не вычислены или вычислены с ошибкой. |
| 5 | Представлены два способа разрезания фигуры, площади не вычислены или вычислены с ошибкой. |
| 10 | Представлен один способ разрезания, вычислены площади, имеется утверждение о равенстве площадей исходной и полученной фигуры. |
| 15 | Представлены не менее двух способов разрезания, площади вычислены, имеется утверждение о равенстве площадей исходной и полученной фигуры. |

или

Представлены не менее двух способов разрезания, площади вычислены, имеется утверждение о неравенстве площадей исходной и полученной фигуры, указаны причины появления погрешности.

Решение.

На рисунках 6-8 представлены три из возможных вариантов решения:

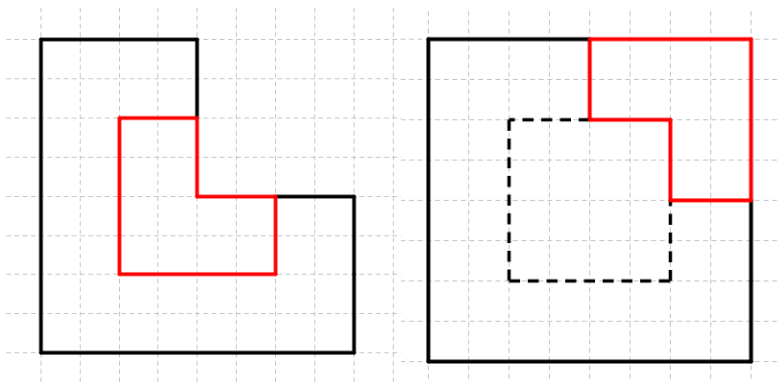


Рисунок 6

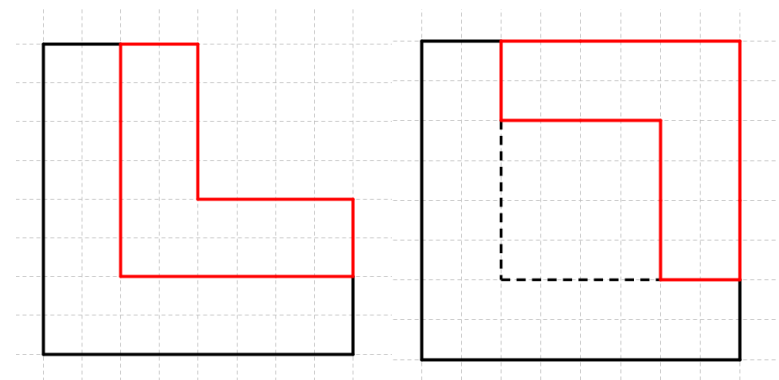


Рисунок 7

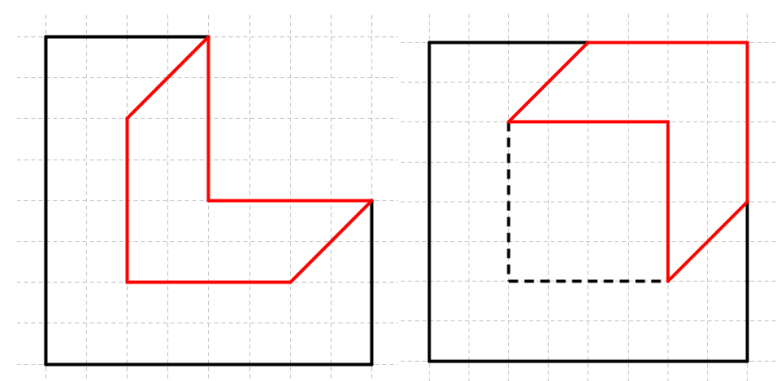


Рисунок 8

Считая клетку за одну квадратную единицу, получаем площадь исходного шестиугольника 48 квадратных единиц, так как он состоит из трёх квадратов площадью 4×4 .

Площадь рамки, как фигуры, равносоставленной из исходной, также равна 48 квадратных единиц.

Однако, на практике можно говорить лишь о приближенном равенстве равносоставленных фигур. Это подтверждает проведенный эксперимент, в котором требовалось разрезать исходную фигуру на две части, составить из них новую фигуру (рамку с квадратным отверстием), затем измерением найти их площади.

Все выделенные действия являются неустранимыми причинами появления погрешностей: погрешность измерения, погрешность вычисления, что объясняет полученное в ходе эксперимента неравенство площадей.

Задание 4.

Постройте в GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) точки с заданными координатами: $A(-1; -2)$, $B(-1; 6)$, $C(5; 6)$, $D(5; -2)$, $E(-1; -2)$, соедините их последовательно отрезками в представленном порядке.

Затем постройте точки с координатами: $F(0; 0)$, $G(0; 5)$, $H(4; 5)$, $I(4; 0)$, $J(0; 0)$, также соедините их последовательно отрезками в представленном порядке. Найдите середину геометрической фигуры $FGHI$ и соедините её отрезком с точкой $K(2; -1)$.

Напишите, что у вас получилось на рисунке? Что изменится в рисунке, если перемещать точку K ?

| Баллы | Критерии (5-6 классы) |
|-------|--|
| 5 | Построен один из прямоугольников. |
| 10 | Все построения сделаны правильно, но нет описания полученного рисунка. |
| 15 | Все построения сделаны правильно. Дано верное описание рисунка. |

Решение:

Построим точки с координатами: $A(-1; -2)$, $B(-1; 6)$, $C(5; 6)$, $D(5; -2)$, $E(-1; -2)$, точки A и E совпадут. Соединив их последовательно отрезками в представленном порядке, получим прямоугольник $ABCD$ (рисунок 9).

Построим точки с координатами: $F(0; 0)$, $G(0; 5)$, $H(4; 5)$, $I(4; 0)$, $J(0; 0)$, точки F и J совпадут. Соединив их последовательно отрезками в представленном порядке, получим второй прямоугольник $FGHI$. Проведем диагонали прямоугольника GI и FH . Точка их пересечения (точка O) – это середина прямоугольника $FGHI$.

Построим точку $K(2; -1)$.

Построим отрезок OK .

Если перемещать точку K , то на рисунке будет изменяться положение точки K и длина отрезка OK .

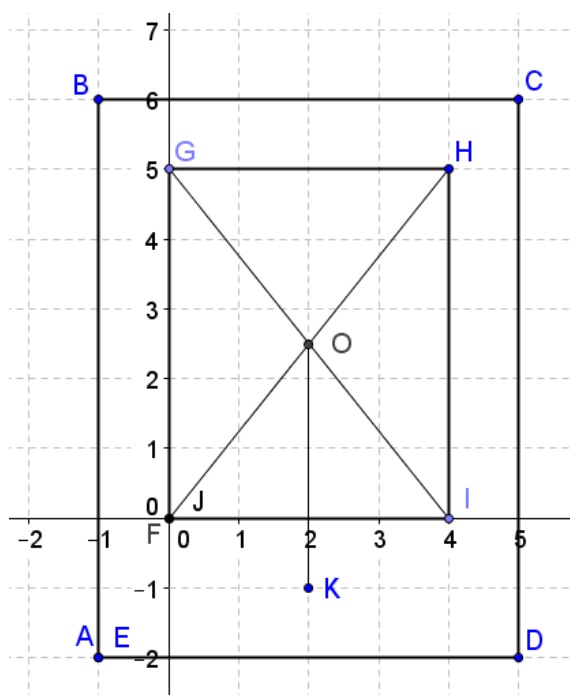


Рисунок 9

Задание 5.

На разных берегах реки расположены две деревни (рисунок 4). Где следует построить мост через реку, чтобы путь из одной деревни в другую был самым коротким. (Берега реки – две параллельные прямые, деревни – точки).

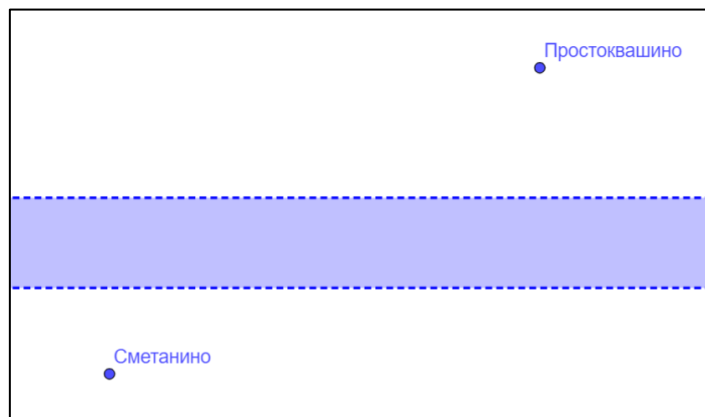


Рисунок 10

| Баллы | Критерии (5-6 класс) |
|-------|--|
| 5 | Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Правильно изображен мост относительно берегов реки, однако его положение определено неверно. |
| 10 | Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Найдено положение, при котором сумма минимальна, но при этом компьютерные построения динамически не устойчивы. Построения на бумаге не содержат дополнительных элементов, позволяющих судить об общности алгоритма решения задачи. |
| 15 | Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. Найдено положение моста, при котором сумма минимальна, но не найден общий способ определения его места положения. |
| 30 | Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента. На монитор выведено значение длин или суммы отрезков. Найдено положение моста, при котором сумма минимальна, найден общий способ определения его места положения. |

Решение:

Пусть берега реки – параллельные прямые a и b , а точки A и B – деревни Сметанино и Простоквашино соответственно (см. рисунок 11).

Построим отрезок, изображающий мост через реку:

- 1) Отметим на прямой b произвольную точку D .
- 2) Через точку D построим перпендикулярную прямую к прямой b (прямая d).
- 3) Найдем точку пересечения прямых d и a (точка E).
- 4) Таким образом, ED – это мост.

Соединим A с D и E с B . Это дороги из деревень, ведущие к мосту.

Вычислим длину пути из одной деревни в другую.

- 1) В строку ввода введем: $AD+DE+EB$.

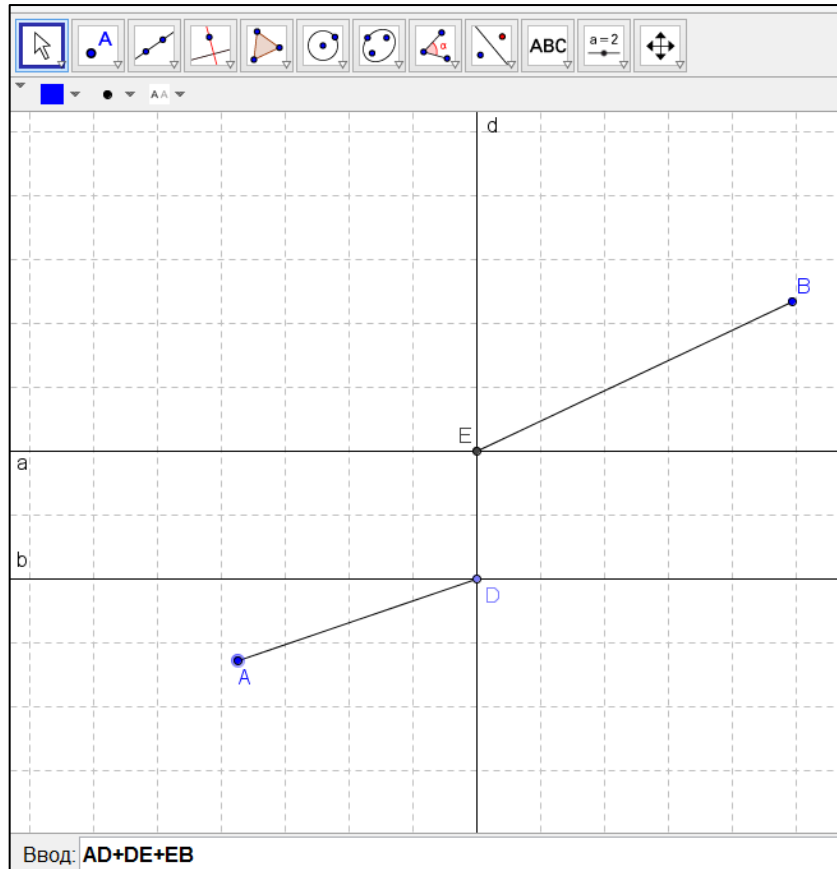


Рисунок 11

- 2) В панели объектов появится число, равное сумме длин этих отрезков.
- 3) Чтобы вывести его на экран, необходимо перетащить его с панели объектов в графическое окно (рисунок 12).

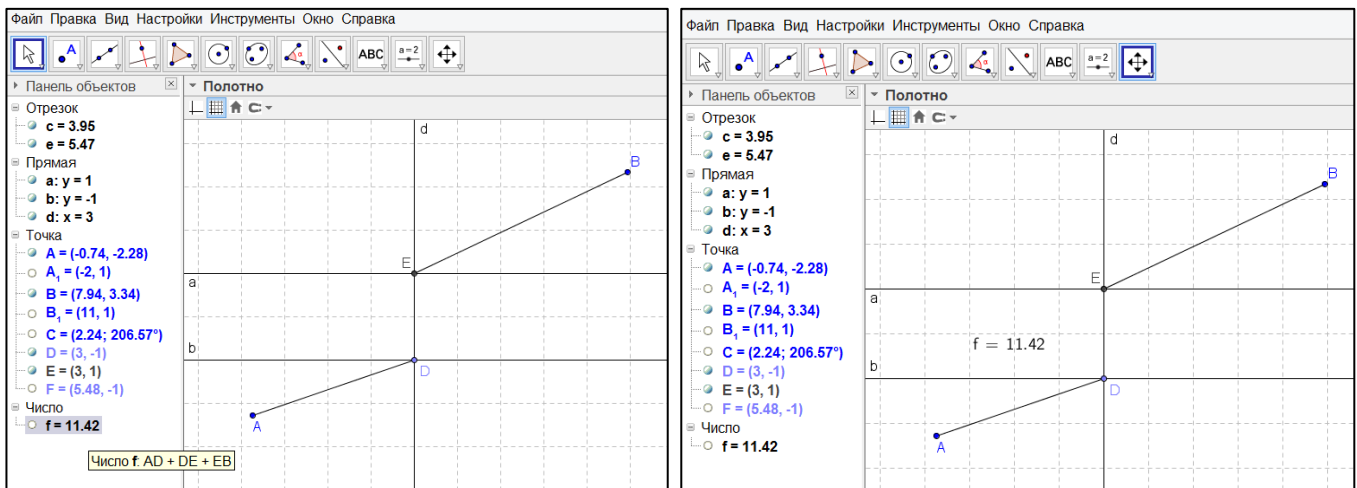


Рисунок 12

Перемещая точку D по прямой b, найдем такое положение, при котором длина пути будет наименьшей.

Уберем из исследуемой суммы длину моста, так как она постоянная. Для этого наложим прямую b на прямую a, при этом точка A перейдет в точку F, точка D перейдет в точку E. (рисунок 13).

Сумма длин отрезков AD и EB будет наименьшей, если отрезки FE и EB будут лежать на одной прямой.

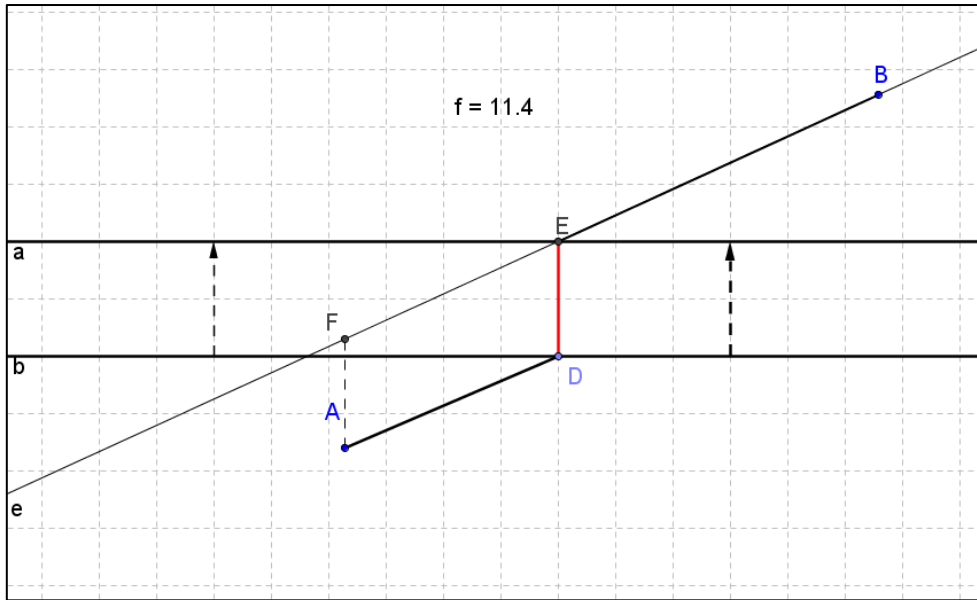


Рисунок 13

2 способ решения (с помощью перегибания листа бумаги).

Перегнуть лист бумаги по прямой, разделяющей длину реки пополам (пунктирная прямая), см. рисунок 14.

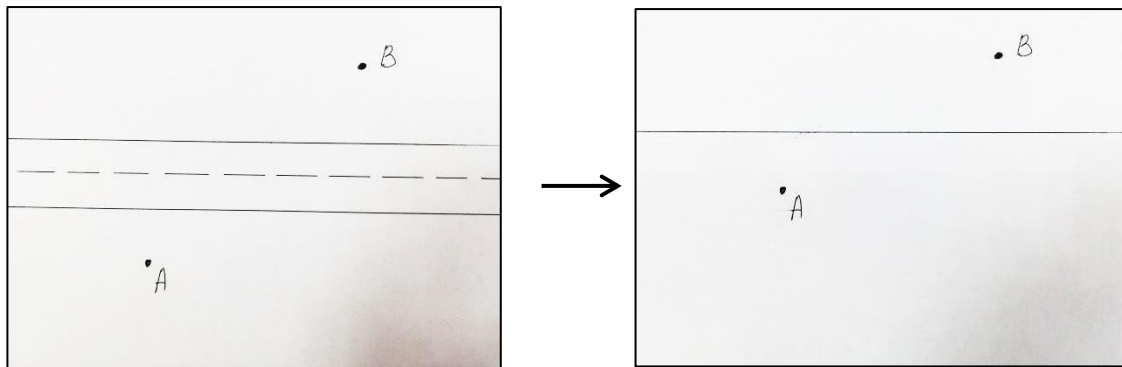


Рисунок 14

Построить с помощью линейки отрезок АВ (рисунок 15).

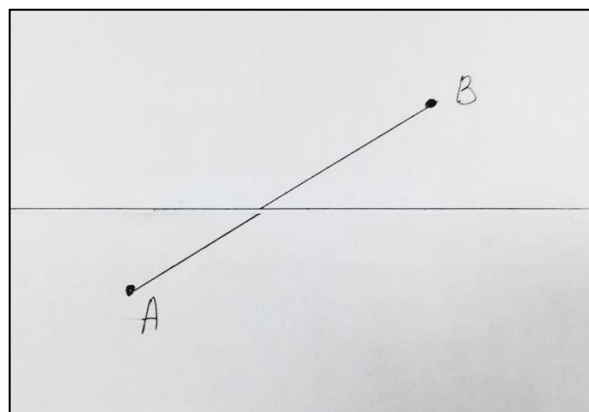


Рисунок 15

Разогнуть лист бумаги, соединить концы отрезков, изображающих дороги к деревьям (рисунок 16), получаем отрезок, изображающий мост через реку.

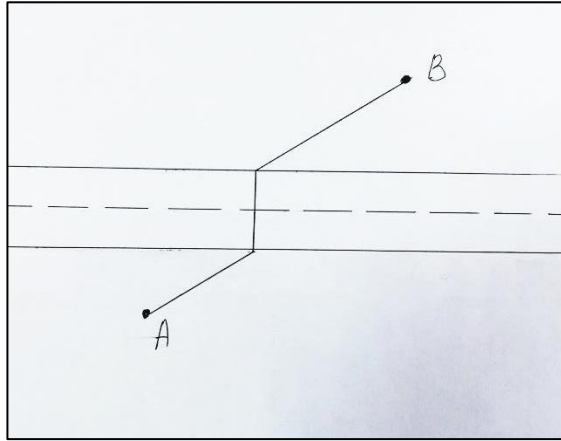


Рисунок 16

Задание 6.

Изменяя чертеж к заданию №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки задач запишите либо на листе бумаги, либо в графическом окне GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Оценивается каждая составленная задача отдельно. Баллы суммируются.

| Баллы | Критерии (5-6 класс) |
|-------|---|
| 1 | В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5. |
| 3 | Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная. |
| 8 | Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5. |
| 10 | Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа. |

Примеры задач:

1) На одном берегу реки расположены две деревни. Где следует построить мост через реку, чтобы путь из деревень до моста был наименьшим.

2) На разных берегах реки расположены три деревни (две по одну сторону, третья по другую сторону реки). Где следует построить мост через реку, чтобы длина дорог между деревнями была наименьшей. (Берега реки – две параллельные прямые, деревни – точки).