

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ДЛЯ 9 КЛАССА

Задание 1. На рисунке 1 представлена окружность, на которой лежат точки А, С и D. Как по отношению к окружности расположена точка E (на окружности, внутри или вне ее)? Обоснуйте свой вывод.

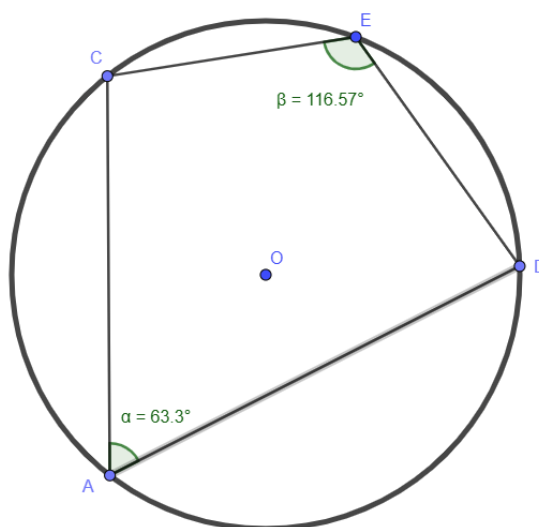


Рисунок 1

Баллы	Критерии (9 класс)
1	Сформулировано свойство об углах вписанного в окружность четырехугольника, но ошибочно сделан вывод о том, что точка лежит внутри окружности
3	Сделан вывод о том, что точка лежит вне окружности, но обоснование вывода не приведено (соответствующая теорема не сформулирована)
5	Сделан вывод о том, что точка лежит вне окружности, но в обосновании допущены ошибки
8	Сделан вывод о том, что точка лежит вне окружности, и вывод обоснован

Решение задания 1.

Сумма противоположных углов вписанного в окружность четырехугольника равна 180° . На представленном рисунке 1 сумма углов А и E равна $179,87^\circ$, следовательно, точка E лежит вне окружности.

Задание 2.

На сковородке помещаются 2 кусочка хлеба. Чтобы обжарить кусочек с одной стороны, требуется 1,5 минуты. Какое наименьшее время потребуется, чтобы обжарить $6n$ кусочков?



Баллы	Критерии (9 класс)
3	Дан неверный ответ, но представлено описание рассуждений
6	Дан верный ответ без обоснований
10	Дан верный ответ с описанием рассуждений

Решение задания 2.

Нам требуется поджарить $6n \times 2 = 12n$ сторон, получаем $\frac{12n}{2} = 6n$ порций, на каждую порцию необходимо 1,5 минуты, поэтому всего для обжаривания потребуется $\frac{3}{2} \times 6n = 9n$ минут.

Ответ: $9n$ минут.

Задание 3.

В квадрате 7×7 живые  и неживые  клетки, которые расположены так, как показано на рисунке 2. Если неживая клетка касается своими сторонами не менее трёх живых, то она оживает, если живая клетка касается не менее трёх неживых клеток - умирает. В остальных случаях клетки сохраняют своё состояние. Пример представлен на рисунке 3.

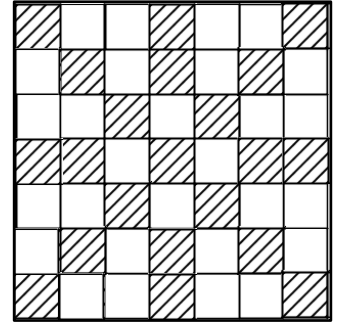


Рисунок 2

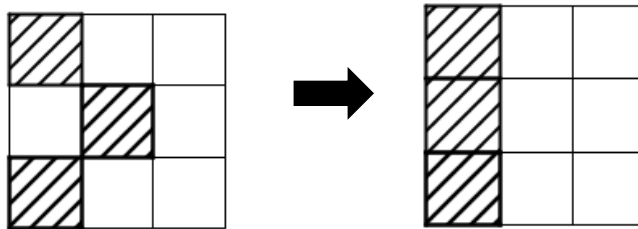


Рисунок 3

Стабильным называется квадрат, в котором все клетки не меняют своего состояния. Может ли данный квадрат стать стабильным? Если да, то сколько для этого потребуется переходов (смен состояний клеток) и как будет выглядеть такой квадрат? Обоснуйте ответ.

Баллы	Критерии (7 -9 классы)
1	Представлен рисунок, демонстрирующий смену состояний клеток, но в нем допущены ошибки
5	Представлен верный ответ о количестве переходов, но не представлен рисунок
10	Дан верный ответ о количестве переходов и представлен рисунок, демонстрирующий смену состояний клеток

Решение:

Смена состояний клеток представлена на рисунке 4.

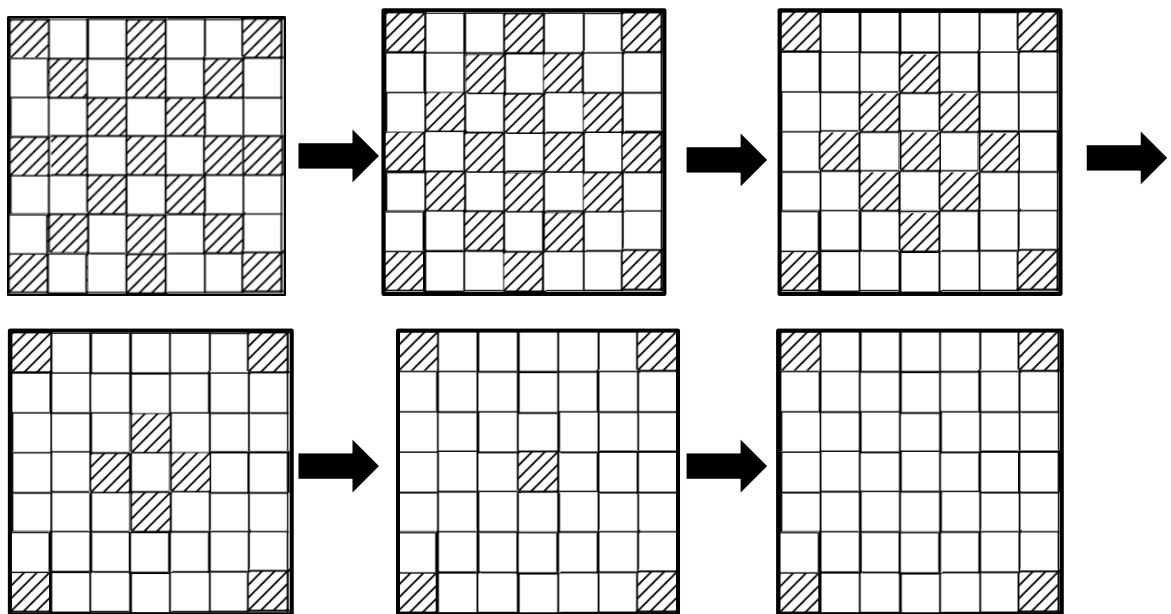


Рисунок 4

Ответ: 5 переходов.

Задание 4.

В графическом окне GeoGebra (Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) постройте прямую AB и точку C , не лежащую на ней (рис. 4). Найдите самый короткий алгоритм построения прямой, проходящей через точку C и образующей с прямой AB угол в 60° , **НЕ ИСПОЛЬЗУЯ** инструменты «Угол заданной величины», «Окружность по центру и радиусу», «Отрезок фиксированной длины». Сколько решений имеет данная задача? В качестве ответа представьте протокол построения.



Рисунок 4

Баллы	Критерии (9 класс)
1	Приведено правильное построение для частного случая взаимного расположения точек A , B и C
10	Приведены правильные построения, но самый короткий алгоритм построения не найден
15	Найден самый короткий алгоритм, однако не указано количество возможных решений
20	Найден самый короткий алгоритм. Правильно указано количество возможных решений

Решение задания 4.

Самый короткий алгоритм построения прямой, проходящей через точку С и образующей с прямой АВ угол в 60° , НЕ ИСПОЛЬЗУЯ инструменты «Угол заданной величины», «Окружность по центру и радиусу», «Отрезок фиксированной длины», следующий:

- 1) построить правильный треугольник со стороной АВ;
- 2) построить через точку С прямую, параллельную AD или DB (имеется 2 решения).

Протокол построения для первого случая представлен на рисунке 5.

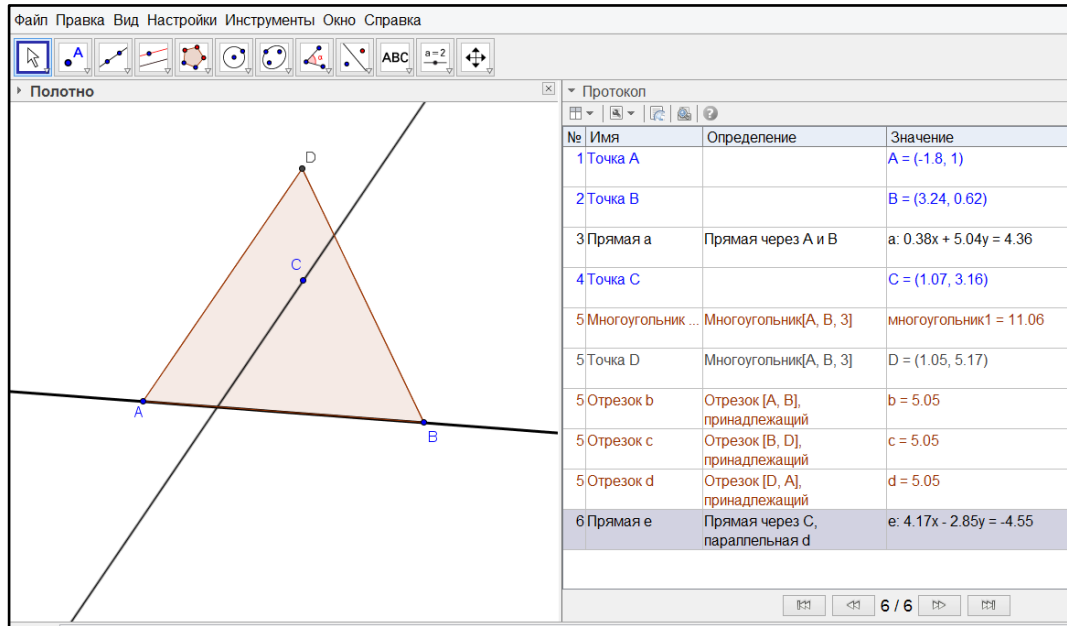


Рисунок 5

Задание 5 (Задача предложена Р. Николаевым).

В треугольнике ABC $AB=7$, $AC=5$ и $BC=3\sqrt{2}$. СН высота, проведенная из точки С к АВ. В треугольнике АНС окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается сторон АС и СН, в треугольнике СВН окружность с центром O_2 и радиусом r_2 касается сторон СН и ВС. Окружности касаются друг друга в точке, лежащей на высоте СН. Найти наибольшее значение суммы: $r_1 + r_2$. Обоснуйте ответ (для этого может быть полезной формула тангенса половинного угла: $tg \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$).

Баллы	Критерии (8 класс)
5	Правильно построена динамически устойчивая модель по условию задачи. Однако выводы из эксперимента не сделаны
15	Задача решена экспериментально, но не представлено обоснование полученных результатов
20	Задача решена, но в доказательство не является полным
30	Задача решена, представлено доказательство всех ключевых моментов решения

Решение:

Рассмотрим рисунок 6.

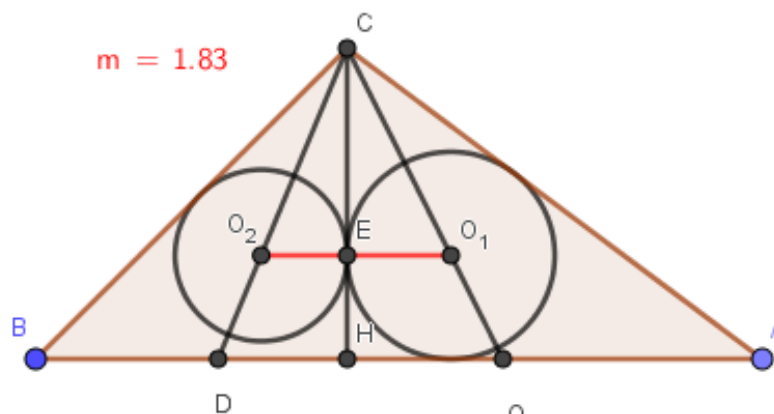


Рисунок 6

$CH = BH = 3$, значит, $HA = 4$.

Тогда $\operatorname{tg}(2HCQ) = \frac{4}{3}$,

$\operatorname{tg}(2DCH) = 1$.

Отсюда $\operatorname{tg}(HCQ) = \frac{4}{3} \div \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16}{9}}\right) = \frac{1}{2}$.

$\operatorname{tg}(DCH) = 1 \div (1 + \sqrt{1 + 1}) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$.

$\operatorname{tg}(HCQ) = \frac{r_1}{3 - r_1} = \frac{1}{2}$.

Откуда получаем: $r_1 = 1$.

$\operatorname{tg}(DCH) = \frac{r_2}{2} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$.

Откуда получаем: $r_2 = \frac{2}{1 + \sqrt{2}}$.

Ответ: $r_1 + r_2 = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{2}}$.

Задание 6.

Изменяя чертёж к задаче № 5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии (7-9 класс)
Оценивается каждая составленная задача отдельно. Баллы суммируются.	
1	Сформулированная задача не связана с задачей 5. Формулировка задачи не полная
3	Сформулированная задача не связана с задачей 5. Формулировка задачи полная и корректная
5	Сформулированная задача связана с задачей 5. Формулировка задачи не полная
8	Сформулированная задача связана с задачей 5. Формулировка задачи полная и корректная. Но, формулировка получена путем логического преобразования условия задачи
10	Сформулированная задача связана с задачей 5. Формулировка задачи полная и корректная. Формулировка получена путем преобразования чертежа

Пример задачи, которая могла бы быть составлена:

В треугольнике ABC $AB=7$, $AC=5$ и $BC=3\sqrt{2}$. CH высота, проведенная из точки C к AB . В треугольнике AHC окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается сторон AC и CH , в треугольнике CBH окружность с центром O_2 и радиусом r_2 касается **прямых** CH и BC . Окружности касаются друг друга в точке, лежащей на высоте CH . Найти наибольшее значение суммы: $r_1 + r_2$. Обоснуйте ответ.