ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9 КЛАССА

Задание 1. Какое наибольшее количество листов бумаги можно получить складыванием пополам листа А4 (для принтера) с последующим отрезанием линий сгиба? Объясните, почему. Какова будет площадь наименьшего из таких листов (в мм^2), если допустить, что при отрезании линий сгиба потери бумаги практически не происходит? Примечание: размеры листа А4 – 210×297 мм.

Баллы	Критерии
1	Верно указано количество сгибов листа бумаги
3	Верно указано количество сгибов листа бумаги, площадь наименьшей части найдена неверно
5	Верно указано количество сгибов листа бумаги, но неверно найдено количество листов бумаги, при этом обосновано найдена площадь полученного наименьшего листа
8	Верное количество сгибов листа бумаги найдено экспериментально, обосновано вычислена площади наименьшего листа

Решение. Подтверждено, как физический феномен, что лист бумаги А4 нельзя сложить вдвое больше семи раз, делая каждый сгиб перпендикулярно предыдущему (рис. 1). Количество листов при отрезании линий сгиба будет равно 2^n.

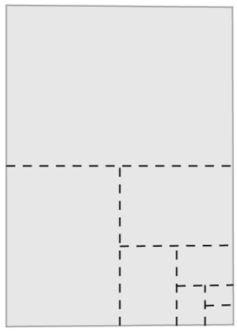

Рисунок 1.

Таким образом, если сделать 7 сгибов пополам, то количество листов станет равно 2^7 =128.

Площадь листа бумаги А4 равна 210×297 = 62370 мм^2. Если допустить, что при отрезании линий сгиба потери бумаги практически не происходит, то площадь наименьшего листа будет равна $\frac{62370}{128} \approx 487{,}3$ мм^2.

Задание 2. Куб составлен из 27 кубиков одинакового размера: 3 из них красные, остальные белые. Какое максимальное количество белых кубиков будут касаться красных только одной гранью? При каком расположении кубиков это возможно? Ответ обоснуйте.

Баллы	Критерии
1	Описана неверная схема расположения кубиков
6	Найдено одно верное расположение с точностью до ракурса
8	Описана неверная схема расположения кубиков, так как не учитывается условие, что белые кубики должны касаться красных только **одной** гранью
10	Обоснованно найдены все верные расположения с точностью до ракурса

Три красных кубика располагаются последовательно на оси куба, проходящей через центры его противоположных граней (см. рисунок 2). В этом случае 12 белых кубиков будут касаться красных только одной своей гранью.

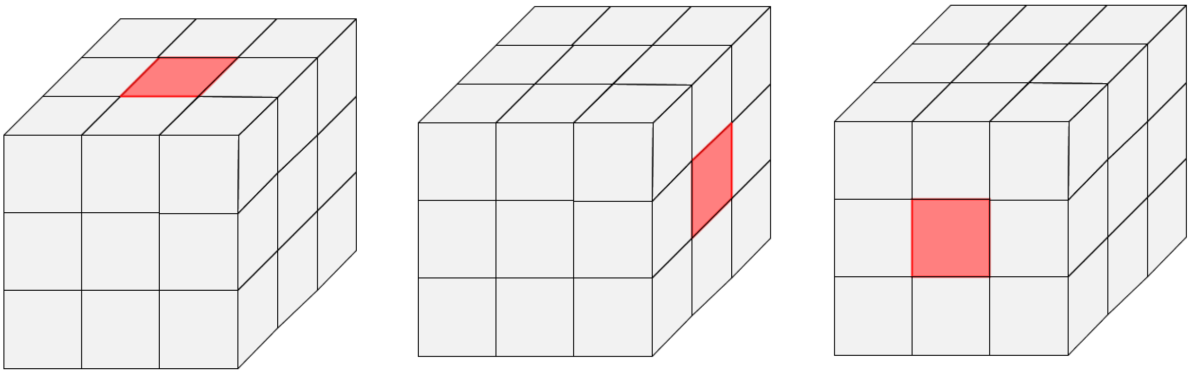

Рисунок 2.

Задание 3. Из прямоугольника 10×7 клеток вырезали прямоугольник 1×6 клеток, как показано на рисунке 3. Разрежьте полученную фигуру на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат. Обоснуйте правильность построений.

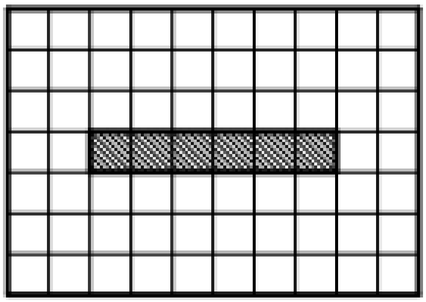

Рисунок 3.

Баллы	**Критерии**
3	Способ разрезания не найден, но указана площадь искомого квадрата
10	Без обоснования представлен верный способ разрезания
15	Обоснованно найден верный способ разрезания фигуры

Решение.

Заданный прямоугольник состоит из 64 клеток, значит квадрат должен иметь сторону в 8 клеток. Способ разрезания фигуры и составления квадрата представлен на рисунке 4.

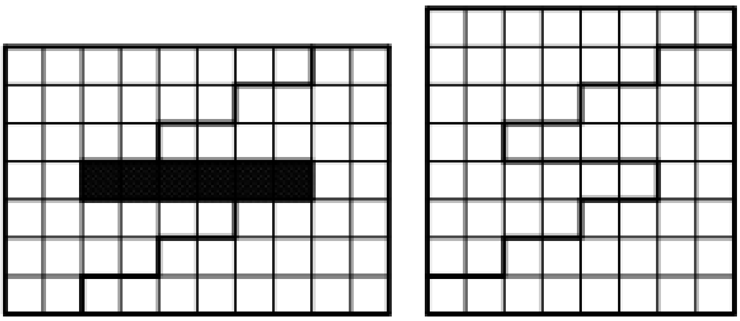

Рисунок 4.

Задание 4. На отрезке АВ отмечена точка С. На отрезках АВ, АС и СВ как на диаметрах построены полуокружности, которые лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей отрезок АВ. В образованный ими криволинейный треугольник АСВ (арбелос) вписана окружность. Постройте по данному описанию динамическую модель этой геометрической конструкции (точка С должна свободно перемещаться по AB). Зависит ли радиус окружности от положения точки C на отрезке AB? Если да, то запишите формулу, выражающую эту зависимость.

Баллы	Критерии
1	Построена модель, соответствующая условию задачи, но не все её свойства являются динамически устойчивыми
5	Построена динамически устойчивая модель арбелоса, но не построена вписанная в него окружность. ИЛИ Построена динамически устойчивая модель арбелоса, а вписанная в него окружность. динамически не устойчива
10	Построена динамически устойчивая модель, но не найдена зависимость радиуса окружности от положения точки C
15	Построена динамически устойчивая модель. Зависимость радиуса окружности полечена неверная или недостаточно обоснована
20	Построена динамически устойчивая модель. Обосновано найдена зависимость радиуса окружности от положения точки C

Решение.

Один из способов построения модели:

1) Построить произвольную прямую AB (см. рисунок 5).

2) С помощью инструмента «Точка на объекте» построить на отрезке AB точку C.

3) Построить полуокружности с диаметрами AB, AC и CB в одной полуплоскости относительно прямой AB.

4) Построить центры дуг AC и CB (точки D и E).

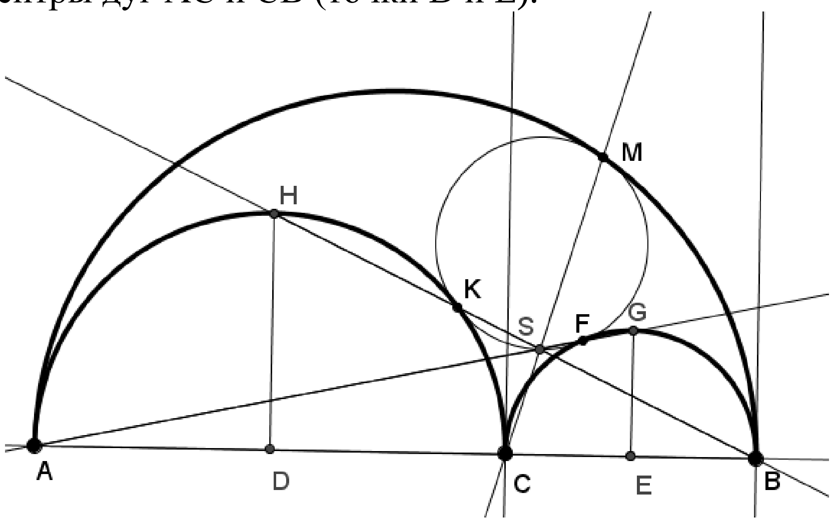

Рисунок 5.

5) С помощью инструмента «Перпендикулярная прямая» построить через точки D и E перпендикулярные прямые к прямой AB.

6) Построить точки пересечения перпендикулярных прямых с дугами AC и CB (точки H и G).

7) Построить прямые HB и AG.

8) Построить точки пересечения прямых HB и AG с дугами AC и CB (точки K и F соответственно).

9) Построить точку пересечения прямых HB и AG (точка S).

10) Построить прямую CS.

11) Построить точку пересечения прямой CS с дугой AB (точка M).

12) С помощью инструмента «Окружность по трём точкам» построить искомую окружность.

С помощью инструмента «Середина или центр» построим центр L окружности, полученной в пункте 12 (см. рисунок 6).

Пусть R_1, R_2 и $R = R_1 + R_2$ – радиусы полуокружностей AC, CB и AB с центрами D, E и O соответственно, L – центр искомой окружности, r – её радиус. Тогда $DL = R_1 + r$, $LE = r + R_2$, $LO = R_1 + R_2 - r$, $DO = R_1$ и $OE = R_2$.

Пусть $\angle LOE = \alpha$, тогда $\angle LOD = 180^\circ - \alpha$. По теореме косинусов для треугольников LOE и LOD имеем: $LE^2 = OL^2 + OE^2 - 2OL \cdot OE \cdot \cos\alpha$ или $(r + R_2)^2 =$ $= (R_1 + R_2 - r)^2 + R_2^{\,2} - 2R_2 \cdot (R_1 + R_2 - r) \cdot \cos\alpha$; $LD^2 = OD^2 + LO^2 + 2OD \cdot LO \cdot \cos(180° - \alpha)$ или

$(R_1 + r)^2 = R_1^{\,2} + (R_1 + R_2 - r)^2 + 2R_1 \cdot (R_1 + R_2 - r) \cdot \cos\alpha$.

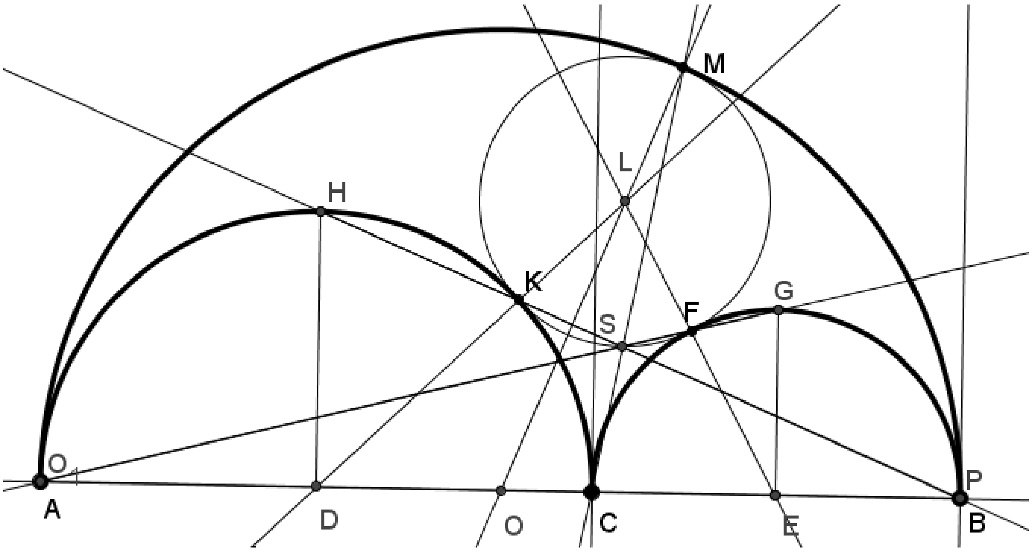

Рисунок 6.

Из системы полученных уравнений выразим радиус искомой окружности:

$$r = \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2)}{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}$$

Окружность имеет наибольший радиус, когда точка C является серединой отрезка AB.

Задание 5. *(Задача предложена Р. Николаевым).*

Даны две прямые $y = ax + a$ и $y = -\frac{1}{a}x - a$. Для какого натурального значения параметра a площадь треугольника, заключенного между этими прямыми и осью ординат, будет наименьшей? Ответ обоснуйте.

Баллы	**Критерии**
5	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента или анализа взаимного расположения прямых, однако выводы на его основе не сделаны
10	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента или анализа взаимного расположения прямых, но найдено неполное решение
15	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента или анализа взаимного расположения прямых. Верно указано значение параметра, но результат не обоснован теоретически
30	Обоснованно получен верный ответ

Ответ: $a = 1$ (рисунок 7).

Одно из возможных решений

При всех натуральных значениях параметра a прямая $y = ax + a$ возрастает и пересекает оси координат в точках (–1; 0) и (0; a), а прямая $y = -\frac{1}{a}x - a$ убывает и пересекает оси координат в точках ($-a^2$; 0) и (0; $-a$). Т.к. произведение угловых коэффициентов прямых равно –1, то они перпендикулярны, значит, исследуемый треугольник прямоугольный.

Найдем координаты точки А пересечения прямых, решив систему $\begin{cases} y = ax + a, \\ y = -\frac{1}{a}x - a. \end{cases}$

Получаем $x_A = -\frac{2a^2}{a^2+1} < 0$ и $y_A = \frac{a-a^3}{a^2+1} \leq 0$ при $a \in N$, следовательно, вершина А прямого угла искомого треугольника лежит в третьей четверти, исключая ось абсцисс (см. рисунок 7).

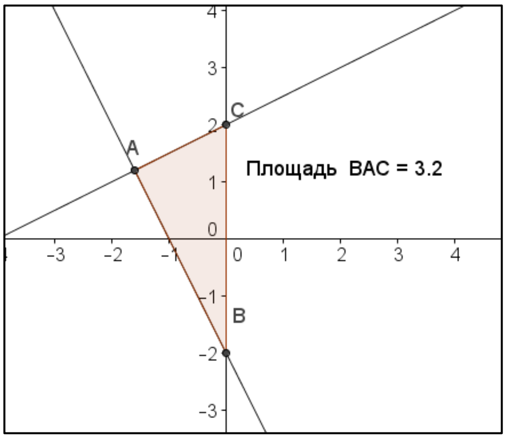

Рисунок 7.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h_{BC} = \frac{1}{2}|a - (-a)| \cdot \left|-\frac{2a^2}{a^2+1}\right| = \frac{2a^3}{a^2+1}$. При $a \in N$ числитель и знаменатель дроби не меньше 2, причем по свойству степени при $a > 1$ степенная функция в числителе растет быстрее степенной функции в знаменателе (т.е. $2a^3 \geq a^2 + 1$ при $a \geq 1$), поэтому $\frac{2a^3}{a^2+1} \geq 1$ и принимает значение 1 при $a = 1$. Таким образом, наименьшее значение площади равно 1 кв.ед. и достигается при значении параметра равного 1 (см. рисунок 8).

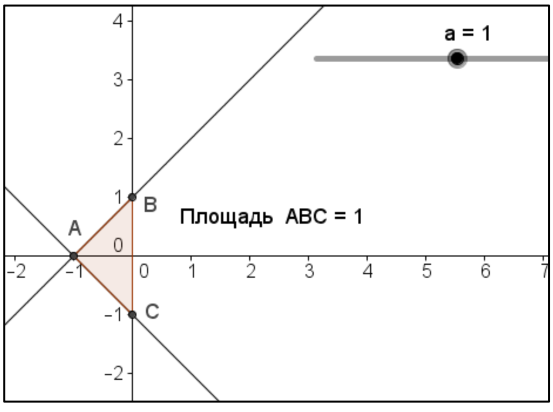

Рисунок 8.

Задание 6. Изменяя чертеж к задаче №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии
Оценивается каждая составленная задача отдельно. Баллы суммируются	
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа

Возможные формулировки задач:

1. Даны две прямые $y = 2x + a$ и $y = -0,5x - a$. Для какого натурального значения параметра a площадь треугольника, заключенного между этими прямыми и осью ординат, будет наименьшая? Ответ обоснуйте. (1 балл)
2. Даны две прямые $y = ax + a$ и $y = -\frac{1}{a}x - a$. Через точку их пересечения построена прямая, параллельная оси ординат, при каких целых значениях параметра a расстояние от этой прямой до оси ординат будет наименьшим? (3 балла)
3. Даны две прямые $y = ax + a$ и $y = -\frac{1}{a}x - a$. При каком натуральном значении параметра a площадь треугольника, заключенного между этими прямыми и осью абсцисс, будет наименьшая? Ответ обоснуйте. (8 баллов)
4. Даны две прямые $y = ax + a$ и $y = -\frac{1}{a}x - a$. При каких значениях параметра a одна из вершин треугольника, заключенного между этими прямыми и осью ординат, будет лежать во второй четверти координатной плоскости? Ответ обоснуйте. (10 баллов)
5. В окружность $x^2 + y^2 = a^2$ вписан треугольник так, что одна его сторона является диаметром этой окружности, а втря хордой этой окружности, лежащей на прямой $y = ax + a$. Найдите все целые значения параметра a, при которых площадь этого треугольника принимает наименьшее значение. Ответ обоснуйте. (10 баллов)