

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

Задание 1. Из прямоугольного листа бумаги А4 нужно вырезать ромб наибольшей площади. Какое наименьшее количество разрезов для этого потребуется? Опишите процесс складывания и разрезания. Какова будет площадь ромба (в см²)?

Примечание: размеры листа А4 – 210×297 мм.

Баллы	Критерии
1	Предложен способ перегибания и разрезания, не удовлетворяющий условию «площадь ромба наибольшая». Расчеты площади полученного ромба нет или выполнены неверно
3	Предложен способ перегибания и разрезания, не удовлетворяющий условию «площадь ромба наибольшая». Верно найдена площадь полученного ромба
5	Найден верный способ получения ромба наибольшей площади с применением двух разрезов. Площадь ромба найдена с помощью измерений
8	Найден верный способ получения ромба наибольшей площади с применением одного разреза. Площадь ромба найдена с помощью измерений
10	Найдены верный способ получения ромба, доказано, что значение его площади наибольшее

Решение. Лист бумаги А4 сложить по диагонали, полученную фигуру согнуть пополам перпендикулярно линии сгиба (см. рисунок 1). Потребуется один разрез для получения ромба наибольшей площади.

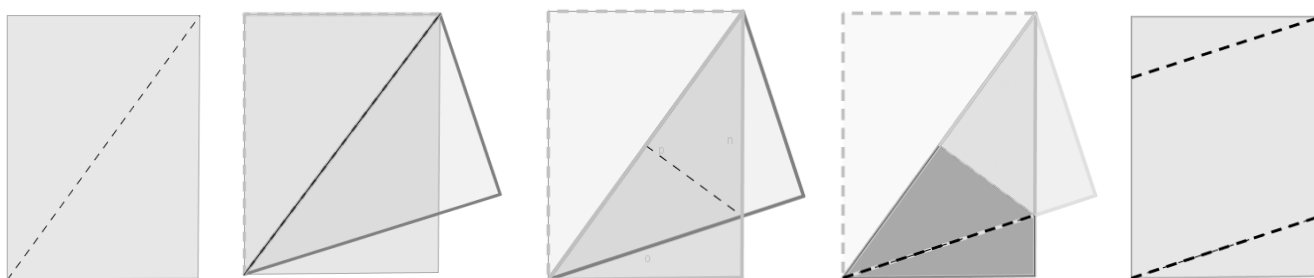


Рисунок 1.

Пусть a – длина (в см) стороны ромба ABCD (см. рисунок 2), его площадь можно найти двумя способами: $S = \frac{AC \cdot BD}{2}$ или $S = a \cdot h_a$, где $h_a = 21$ см (меньшая сторона листа бумаги). Диагонали ромба найдем по теореме Пифагора:

$AC = \sqrt{29,7^2 + 21^2}$, $BD = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2}$. Найденные результаты подставим в уравнение $\frac{AC \cdot BD}{2} = 21a$ и найдем $a = 22,2$ см. Тогда площадь ромба $S = 21 \cdot 22,2 = 466,2$ см².

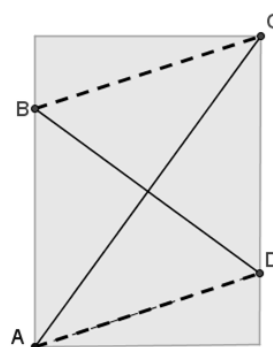


Рисунок 2.

Задание 2. Имеется 8 кубиков одинакового размера: 3 красных и 5 белых. Из них составлен куб. Возможно ли такое расположение кубиков, чтобы все белые кубики касались красных двумя своими гранями? Какое наибольшее количество белых кубиков может касаться красных только двумя своими гранями? Ответ обоснуйте.

Баллы	Критерии
1	Дан обоснованный ответ только на первый вопрос. Или

	Описана неверная схема расположения кубиков
6	Дан верный ответ на второй вопрос без объяснения и/или иллюстрации схемы как он был получен. Или Представлен один верный способ расположения кубиков с точностью до ракурса
8	Дан неверный ответ на первый вопрос. Представлены все способы расположения кубиков с точностью до ракурса
10	Дан верный ответ на первый вопрос. Представлены все способы расположения кубиков с точность ракурса

Решение. Расположение кубиков, при котором все белые кубики касались бы красных двумя своими гранями, невозможно. Наибольшее количество белых кубиков, касающихся красных только двумя своими гранями, равно 3. Они должны быть расположены так, чтобы один белый кубик касался красных кубиков тремя гранями, и один белый не касался гранями красных кубиков (см. рисунок 3).

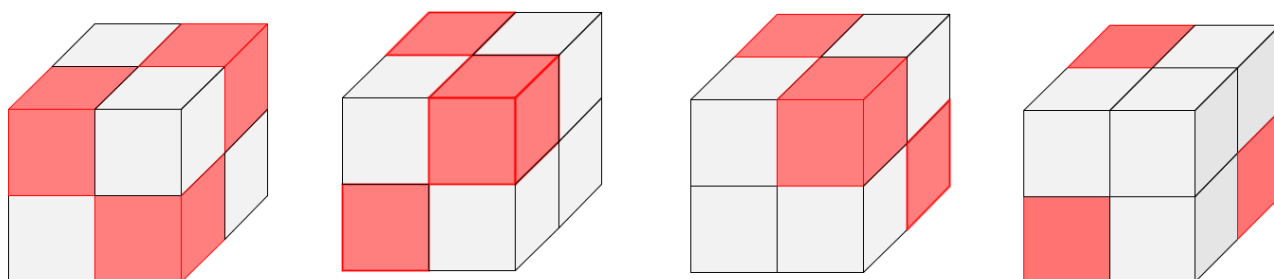


Рисунок 3.

Задание 3. Разрежьте данный квадрат (рисунок 4) по сторонам клеток так, чтобы все части были одинакового размера и формы, и чтобы каждая содержала по одному кружочку и звездочке. Обоснуйте правильность построений.

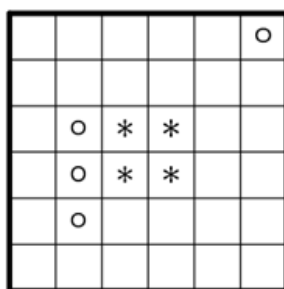


Рисунок 4.

Баллы	Критерии
1	Представлен способ разрезания квадрата на четыре равновеликие фигуры по 9 клеток, но разной формы
3	Способ разрезания не найден, но указано, что полученные фигуры необходимо совместить
10	Решение найдено без обоснований
15	Обоснованно получено верное решение

Решение. Фигуры, имеющие одинаковые размеры и форму, называются равными. Если их можно совместить, то эти фигуры называются одинаковыми. Способ разрезания представлен на рисунке 5.

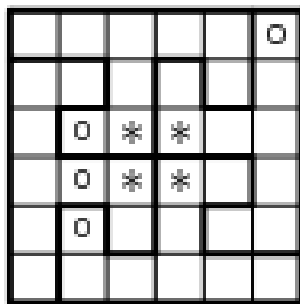


Рисунок 5.

Задание 4. На рисунке 6 изображена динамическая модель. Точка C свободно перемещается по отрезку AB . Постройте такую же модель и с ее помощью определите, какое свойство четырехугольника $CDEF$ не зависит от положения точки C ? Объясните, почему. Найдите такое положение точки C , при котором его площадь наибольшая.

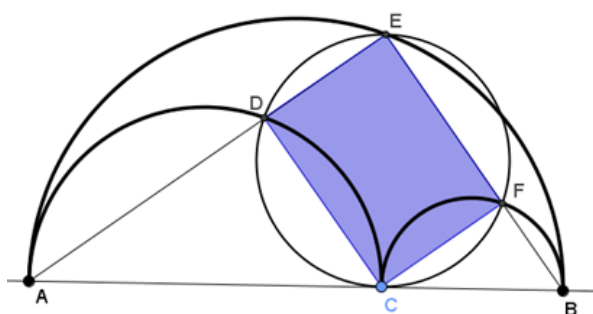


Рисунок 6.

Баллы	Критерии
1	Построена модель, соответствующая условию задания, но не все её свойства, заданные условием задачи, являются динамически устойчивыми
5	Построенная модель динамически устойчива, но не найдено ни одного свойства. Или Построена модель, соответствующая условию задания, но не все её свойства, заданные условием задачи, являются динамически устойчивыми, при этом найдено одно свойство четырехугольника
10	Построенная модель динамически устойчива. Экспериментально найдены некоторые свойства четырехугольника, но теоретически они не обоснованы или обоснованы недостаточно. Найдено положение точки C , при котором площадь четырехугольника наибольшая
15	Построенная модель динамически устойчива. Экспериментально найдены и теоретически обоснованы некоторые свойства четырехугольника. Не найдено положение точки C , при котором площадь четырехугольника наибольшая
20	Построенная модель динамически устойчива. Экспериментально найдены и теоретически обоснованы все свойства четырехугольника. Теоретически обосновано, что четырехугольник является прямоугольником. Обоснованно получено положение точки C , при котором площадь четырехугольника наибольшая

Решение.

Один из вариантов построения модели:

- 1) Построить прямую AB (см. рисунок 7).
- 2) С помощью инструмента «Точка на объекте» построить на ней точку C .

- 3) Построить полуокружности диаметрами АВ, АС и СВ в одной полуплоскости относительно прямой АВ.
- 4) С помощью инструмента «Перпендикулярная прямая» построить в точке С прямую, перпендикулярную АВ.
- 5) Построить точку пересечения перпендикулярной прямой с дугой АВ (точка Е).
- 6) Построить прямые АЕ и ВЕ.
- 7) Построить точки пересечения этих прямых с дугами АС и СВ (точки D и F соответственно).
- 8) Построить четырехугольник DEFC.
- 9) Построить с помощью инструмента «Середина или центр» середину отрезка ЕС (точка О).
- 10) Построить окружность с центром О и радиусом ОЕ.

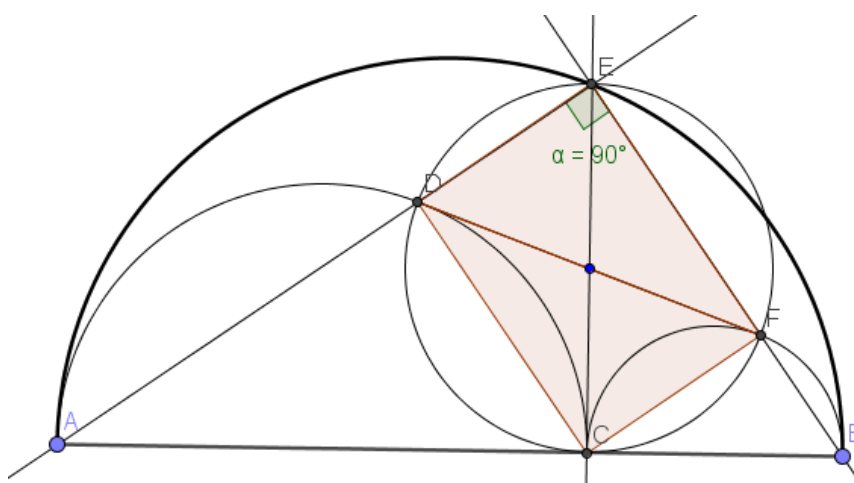


Рисунок 7.

Возможные формулировки свойств: 1) все углы четырехугольника прямые; 2) противоположные стороны четырехугольника равны (параллельны); 3) четырехугольник является прямоугольником; 4) диагонали четырехугольника являются диаметрами окружности; и др. (свойства прямоугольника).

Задание 5. (Задача предложена Р. Николаевым).

Дана функция $f(x) = x^2 - (a + 1)x + a$, где a принимает натуральные значения от 1 до 8. Когда график этой функции пересекает ось абсцисс в двух точках А и В и ось ординат в точке С, образуется треугольник АВС. При каких значениях параметра a , площадь треугольника АВС будет иметь четное значение. Ответ обоснуйте.

Баллы	Критерии
5	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента или анализа положения параболы в системе координат. Не указано ни одного верного значения параметра
10	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента или анализа положения параболы в системе координат. Найдено неполное решение или в ответ включено значение $a = 1$
15	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента или анализа положения параболы в системе координат. Верно найдено множество значений параметра, но результат не доказан, или дано неполное обоснование

Ответ: $a \in \{4; 5; 8\}$.

Одно из возможных обоснований:

Графиком функции $f(x) = x^2 - (a + 1)x + a$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем ее точки пересечения с осью абсцисс: $x^2 - (a + 1)x + a = 0$, $x_1 = 1$ и $x_2 = a$; с осью ординат: $f(0) = a$.

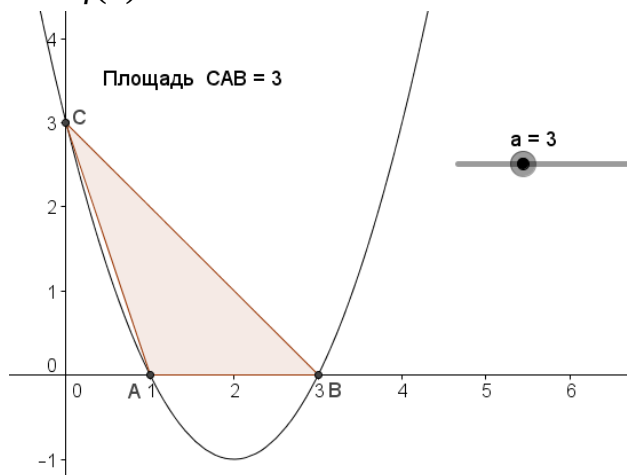


Рисунок 8.

Пусть вершина A треугольника ABC имеет координаты $(1; 0)$, вершина $B - (a; 0)$, вершина $C - (0; a)$ (см. рисунок 8).

При $a = 1$ точки A и B совпадают, следовательно, треугольник не существует.

Если $a \neq 1$, то $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CO = \frac{1}{2} |a - 1| \cdot |a|$.

Площадь треугольника кратна двум, следовательно, $\frac{1}{2} |a - 1| \cdot |a| = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$. Т.к. числа a и $(a - 1)$ последовательные натуральные, то равенство $|(a - 1)a| = 4k$ возможно только, когда одно из них кратно четырем. Следовательно, на заданном множестве значений параметра имеем: $a = 4$, $a = 5$ или $a = 8$.

Задание 6. Изменяя чертеж к задаче №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии
Оценивается каждая составленная задача отдельно. Баллы суммируются	
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа

Возможные формулировки задач:

1. Дана функция $f(x) = x^2 - (a + 1)x + a$, где a принимает натуральные значения от 3 до 10. Когда график этой функции пересекает ось абсцисс в двух точках A и B и ось ординат в точке C , образуется треугольник ABC . При каких значениях параметра a , площадь треугольника ABC будет иметь четное значение. Ответ обоснуйте. (1 балл)

2. Дана функция $f(x) = x^2 - (a + 1)x + a$, где a принимает натуральные значения от 1 до 8. При каких значениях параметра a график этой функции имеет с графиком функции $f(x) = x + a$ общие точки? Ответ обоснуйте. (3 балла)

3. Дана функция $f(x) = x^2 - (a + 1)x + a$, где a принимает натуральные значения от 1 до 8. Когда график этой функции пересекает ось абсцисс в двух точках А и В и ось ординат в точке С, образуется треугольник ABC . При каких значениях параметра a , значение площади треугольника ABC будет нечетным? Ответ обоснуйте. (8 баллов)

4. Дана функция $f(x) = x^2 - (a + 1)x + a$, где a принимает натуральные значения от 1 до 8. Когда график этой функции пересекает ось абсцисс в двух точках А и В, то вершина параболы (точка С) и точки А и В образуют треугольник ABC . При каких значениях параметра a значение площади треугольника ABC будет кратно 3? Ответ обоснуйте. (10 баллов)