

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

Задание 1. Прямоугольный лист бумаги А4 нужно сложить так, чтобы одним разрезом вырезать квадрат (наибольшей площади). Опишите, как это сделать, и найдите площадь оставшейся части (в см²).

Примечание: размеры листа А4 – 210×297 мм.

Баллы	Критерии
1	Представлен верный способ перегибания и разрезания. Расчеты площади остатка нет
3	Представлен верный способ перегибания и разрезания. Площадь остатка найдена с вычислительной ошибкой или ошибкой перевода единиц измерения Или Площадь остатка найдена с помощью измерений размеров остатка, но не указаны причины погрешности результата
5	Представлен верный способ перегибания и разрезания. Площадь остатка найдена с помощью измерений размеров остатка, указаны причины погрешности результата
8	Представлен верный способ перегибания и разрезания, правильно вычислена площадь остатка

Решение. Лист бумаги А4 нужно сложить так, чтобы сторона квадрата была равна его меньшей стороне 210 мм, для этого необходимо совместить одну сторону прямоугольника с другой (см. рисунок 1). Оставшаяся часть листа будет прямоугольником шириной $297 - 210 = 87$ мм и длиной 210 мм. Его площадь равна произведению ширины на длину $210 \times 87 = 18270$ мм. Переводим значение площади в сантиметры: 182,7 см².

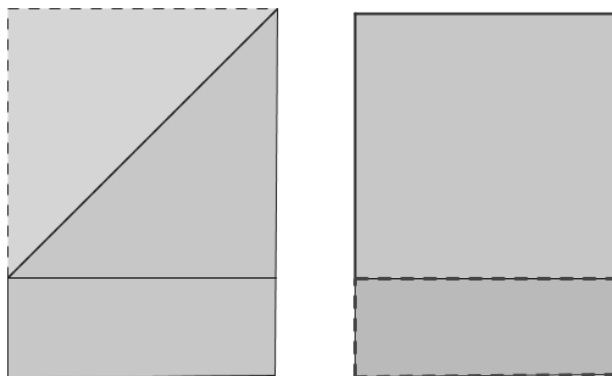


Рисунок 1.

Задание 2. Имеется 8 кубиков одинакового размера: 2 красных и 6 белых. Из них составлен куб. Как они должны быть расположены, чтобы наибольшее количество белых кубиков касалось красных только одной своей стороной (гранью)?

Баллы	Критерии
1	Описана неверная схема расположения кубиков
6	Представлен один верный ракурс расположения кубиков
8	Представлены два или три ракурса правильного расположения кубиков
10	Представлены все четыре ракурса правильного расположения кубиков

Решение. Красные кубики должны располагаться в противоположных вершинах составленного куба. См. рисунок 2.

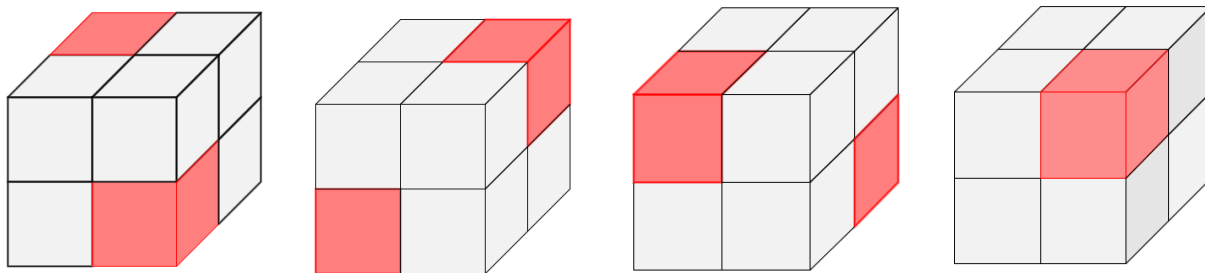


Рисунок 2.

Задание 3. Разрежьте квадрат 6×6 из клетчатой бумаги, изображенный на рисунке 3, на четыре одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала три закрашенные клетки. Обоснуйте правильность построений.

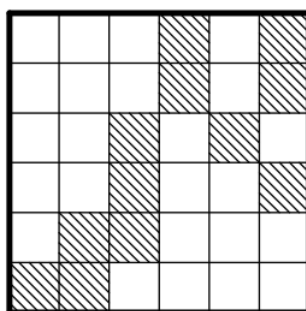


Рисунок 3.

Баллы	Критерии
1	Представлен способ разрезания квадрата на четыре равновеликие фигуры по 9 клеток, но разной формы
3	Решение не найдено, при этом в рассуждениях «одинаковость частей» сводится к утверждениям об одной форме и/или размере фигур
10	Решение найдено без обоснований
15	Обоснованно получено верное решение

Решение. Фигуры, имеющие одинаковые размеры и форму, называются равными фигурами. Если их можно совместить, то эти фигуры называются одинаковыми. Способ разрезания данного квадрата представлен на рисунке 4.

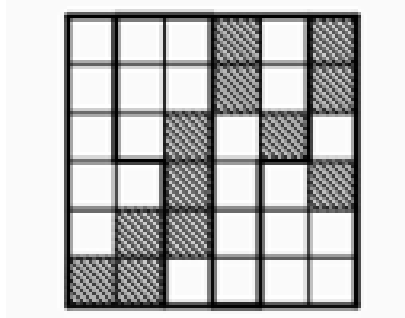


Рисунок 4.

Задание 4. На рисунке 5 изображена динамическая модель. Точка C свободно перемещается по отрезку AB . Постройте такую же модель и с ее помощью определите, какое свойство треугольника DEF не зависит от положения точки C ? Объясните вывод.

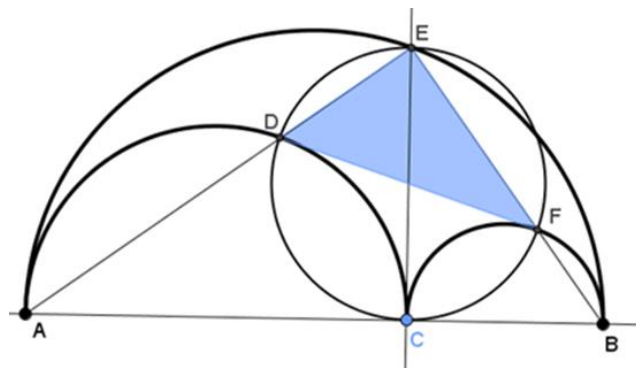


Рисунок 5.

Баллы	Критерии
1	Построена модель, соответствующая условию задания, но не все её свойства, заданные условием задачи, являются динамически устойчивыми
5	Построенная модель динамически устойчива, но не найдено ни одного свойства. Или Построена модель, соответствующая условию задания, но не все её свойства, заданные условием задачи, являются динамически устойчивыми, при этом сформулировано одно свойство треугольника
10	Построена правильная динамически устойчивая модель. Экспериментально установлено одно из свойств треугольника. Вывод теоретически не обоснован или обоснован неполно
15	Построена правильная динамически устойчивая модель. Экспериментально установлены несколько, но не все свойства треугольника. Выводы теоретически обоснованы
20	Построена правильная динамически устойчивая модель. Экспериментально установлены все свойства треугольника. Выводы теоретически обоснованы

Решение.

Один из вариантов построения модели:

- 1) Построить произвольно прямую AB (см. рисунок 6).
- 2) С помощью инструмента «Точка на объекте» построить на ней точку C .
- 3) Построить полуокружности с диаметрами AB , AC и CB в одной полуплоскости относительно прямой AB .
- 4) С помощью инструмента «Перпендикулярная прямая» построить в точке C прямую, перпендикулярную AB .
- 5) Построить точку пересечения построенной перпендикулярной прямой с дугой AB (точка E).
- 6) Построить прямые AE и BE .
- 7) Построить точки пересечения этих прямых с дугами AC и CB (точки D и F , соответственно).
- 8) Построить треугольник DEF .
- 9) Построить середину отрезка EC (точку O) с помощью инструмента «Середина или центр».
- 10) Построить окружность с центром в точке O и радиусом OE .

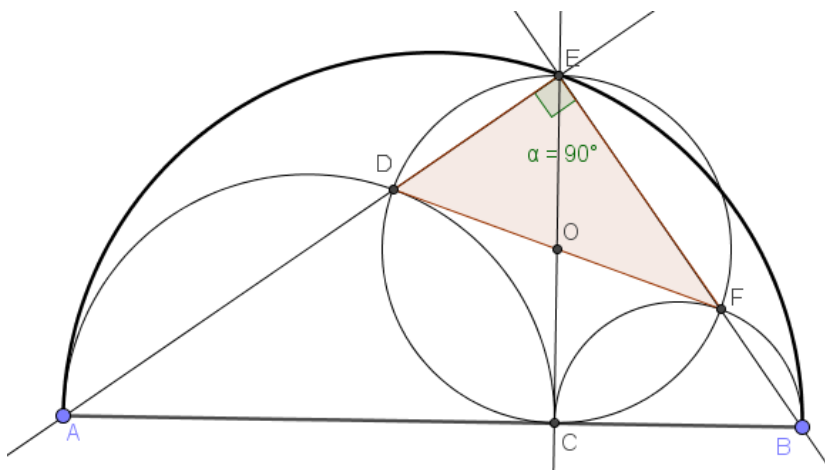


Рисунок 6.

Возможные формулировки свойств: 1) при перемещении точки C по прямой AB сохраняется величина угла DEF ($\angle DEF = 90^\circ$); 2) треугольник DEF является прямоугольным; 3) сторона DF треугольника равна отрезку EC ; 4) сторона DF является диаметром окружности, проходящей через точки D , E , F и C ; 5) радиус описанной окружности треугольника DEF равен половине стороны DF ; 6) медиана треугольника к стороне DF равна её половине; 7) сторона треугольника DF делит отрезок CE пополам; 8) EC делит треугольник DEF на два равнобедренных треугольника DEO и OEF ; и др.

При другом способе построения (например, D и F строили как пересечение полуокружностей с окружностью диаметра CE) могут быть сформулированы другие свойства (например, вершины D и F принадлежат хордам AE и BE соответственно).

Задание 5 (Задача предложена Р. Николаевым).

Даны две прямые $y=ax$ и $y=-ax-a$. Какому условию должно удовлетворять значение параметра a , чтобы существовал треугольник, заключенный между этими прямыми и осью Ox , и его площадь была целочисленной? Обоснуйте свои выводы.

Баллы	Критерии
5	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента или анализа взаимного расположения прямых. Не найдено ни одного верного значения параметра
10	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента или анализа взаимного расположения прямых. Найдено неполное решение или в ответ включено значение $a = 0$.
15	Построена верная динамическая модель или соответствующий чертеж на бумаге, по которым можно судить о проведении эксперимента или анализа взаимного расположения прямых. Верно найдено множество значений параметра, но результат не доказан, или дано неполное обоснование
30	Обоснованно получен верный ответ

Ответ: $a = 4k$, где $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Одно из возможных обоснований:

Если $a = 0$, то прямые совпадают со осью Ox , и треугольник не существует.

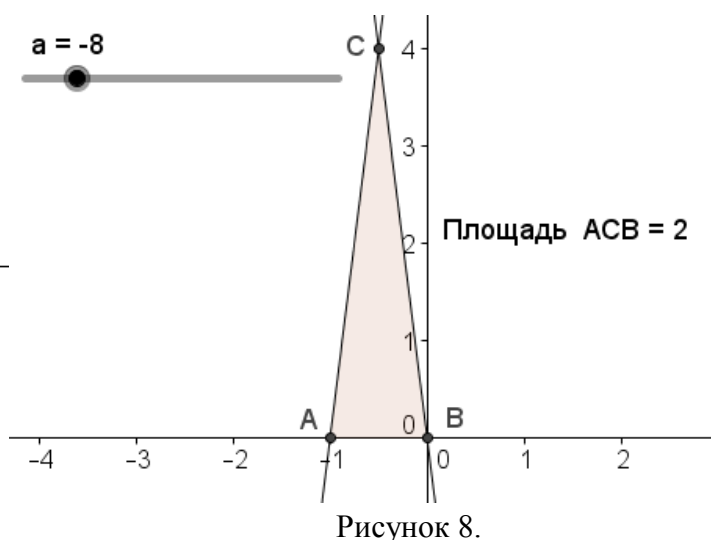
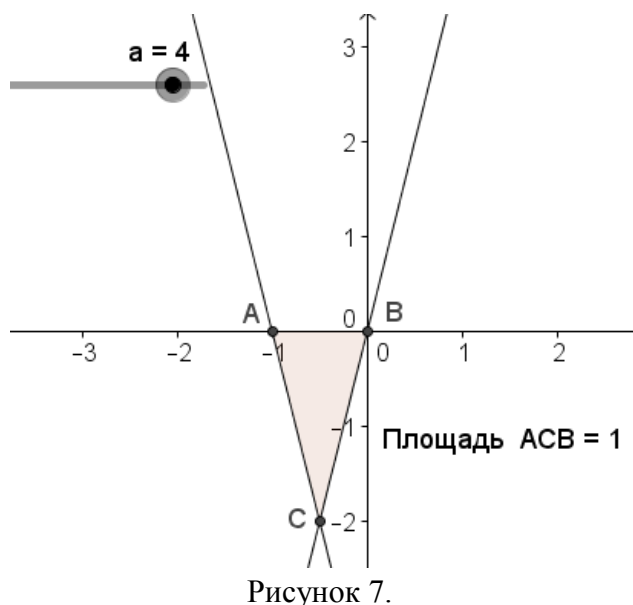
Если $a \neq 0$, то обозначим точки пересечения прямых $y = -ax - a$ и $y = ax$ с осью Ox соответственно A и B , а пересечение прямых $y = ax$ и $y = -ax - a$ точкой C . При этом $A(-1; 0)$, $B(0; 0)$, $C(-\frac{1}{2}; -\frac{a}{2})$. Угловые коэффициенты прямых $y = ax$ и $y = -ax - a$

противоположны, поэтому треугольник ABC равнобедренный ($AC=BC$). При $a > 0$ вершина C лежит ниже оси Ox (рисунок 7), при $a < 0$ – выше оси Ox (рисунок 8).

Площадь треугольника ABC равна половине произведения стороны AB (модуль абсциссы точки A) и высоты к ней (модуль ординаты точки C), т.е.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-1| \cdot \left| -\frac{a}{2} \right| = \frac{1}{4} |a| \text{ или } |a| = 4S_{\Delta ABC}.$$

Т.к. по условию $S_{\Delta ABC}$ принимает только целые значения, то равенство возможно тогда и только тогда, когда a кратно 4.



Задание 6. Изменяя чертеж к задаче №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии
Оценивается каждая составленная задача отдельно. Баллы суммируются	
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа

Возможные формулировки задач

1. Даны две прямые $y = 2x$ и $y = -ax - a$. При каких значениях параметра a существует треугольник целочисленной площади, заключенный между этими прямыми и осью Ox ? (1 балл)
2. Даны прямые $y = ax$ и $y = -ax - a$. При каких значениях параметра a прямая $x=0$ имеет с этими прямыми одну общую точку? (3 балла)
3. Найти значения параметра a , при которых существует треугольник, заключенный между прямыми $y = 2x$, $y = -ax - a$ и осью Oy . Найдите наименьшее значение площади такого треугольника. (8 баллов)

4. Даны прямые $y = ax$ и $y = -ax - a$. При каких значениях параметра a , существует треугольник, заключенный между этими прямыми и осью Ox , а ордината его вершины, не лежащей на оси Ox , кратна 2? (10 баллов)