ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9 КЛАССА

Задание 1. Разрежьте правильную шестиконечную звезду (рисунок 1) на пять частей и сложите из них треугольник так, чтобы части не накладывались одна на другую. Выполните измерения и вычислите его площадь. Сравните ее с площадью исходного многоугольника, объясните результат.

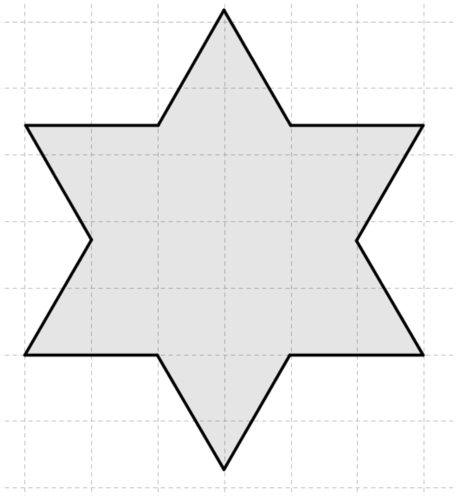

Рисунок 1

Баллы	Критерии
1	Введено допущение о существовании разрезания, но оно не найдено. В этих условиях обоснованно сделан вывод о равенстве площадей (со ссылкой на теорему о равновеликости равносоставленных плоских фигур).
3	Введено допущение о существовании разрезания, но оно не найдено. В этих условиях обоснованно сделан вывод о неравенстве площадей (со ссылкой на погрешности измерения, возможно, дополнительно указана погрешность вычисления). или Найден один из способов разрезания, но не сделано никаких выводов.
5	Предложен один из способов разрезания и возможна одна из двух ситуаций: 1) имеется утверждение о равенстве площадей исходной и полученной фигуры, основанное на использовании теоремы или являющееся следствием действий с приближенными значениями без указания наличия неустранимых погрешностей; 2) имеется утверждение о неравенстве площадей исходной и полученной фигуры, основанное на результатах измерений и расчетов, но при их осуществлении допущены ошибки.
8	Представлен один из способов разрезания, длины сторон измерены, площади правильно вычислены, обнаружено неравенство площадей, правильно указаны причины нарушения равенства.

Решение. Если принять сторону квадратной клетки за 1 см, то площадь исходного многоугольника будет равна $12\sqrt{3}$ см^2, так как он состоит из 12 равносторонних треугольников площадью $\sqrt{3}$ см^2. Разрезать исходный многоугольник на пять частей, которые после перераспределения образуют треугольник можно несколькими способами, некоторые из них представлены на рис. 2 и 3.

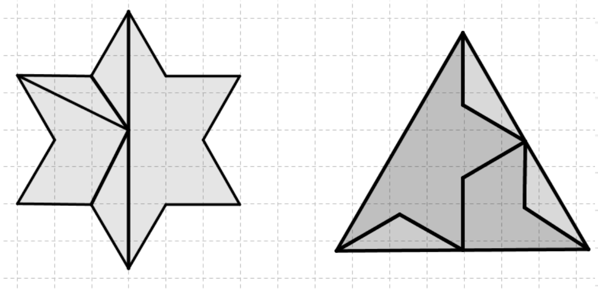

Рисунок 2

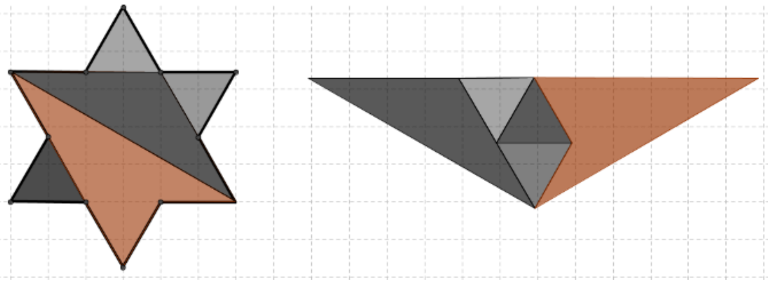

Рисунок 3

Теперь находим площадь получившегося треугольника. Наблюдаем кажущееся различие площадей.

Этот парадокс о кажущемся нарушении теоремы о равновеликости равносоставленных фигур: «каждую плоскую фигуру с прямолинейными границами можно преобразовать в любую другую равновеликую первой фигуру того же типа, разрезав предварительно исходную фигуру на конечное число частей» объясняется неточностью измерений, оперированием с приближенными значениями при вычислении и неточностью складывания фигуры из частей.

Задание 2. (Задача Я.И. Перельмана / Занимательная геометрия)

Перед вами восемь равных кругов (рисунок 4). Семь темных кругов – неподвижны, а восьмой (светлый) катится по ним без скольжения. Сколько оборотов он сделает, обойдя неподвижные круги один раз? Опишите свои рассуждения.

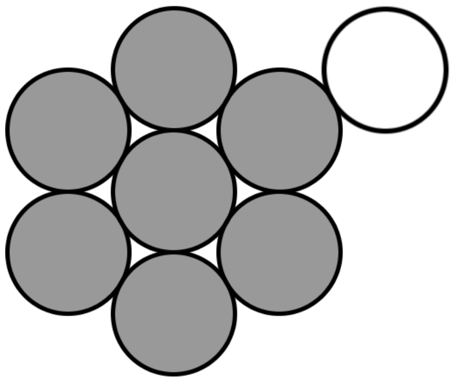

Рисунок 4

Баллы	Критерии
1	Дан правильный или неправильный ответ без описания способа его получения, но при этом указано, что полученный результат является приближенным.
6	Дан правильный ответ (без указания его приближенности), описан ход эксперимента (вещественного или мысленного) в результате которого он был получен.
8	Дан правильный ответ, описан только ход эксперимента (вещественного или мысленного) в результате которого он был получен. Указано, что результат может быть неточным, так как получен в результате эксперимента.
10	Дан правильный ответ, описан ход эксперимента, результаты которого теоретически обоснованы.

Решение.

Эксперимент можно провести практически, например, с монетами: возьмем 8 монет одинакового достоинства, расположим их, как показано на рисунке 3, и, прижимая к столу семь монет, прокатим по ним восьмую. Для определения числа оборотов будем следить за положением цифры на монете. Когда цифра примет первоначальное положение, монета обернется вокруг своего центра один раз.

Проделав этот опыт не в воображении, а на самом деле, скорее всего вы установите, что монета сделала 4 оборота.

Теперь выясним верность эксперимента с помощью расчетов. Представим себе перемещение подвижного круга из точки A в ложбинку между двумя неподвижными кругами. По чертежу (рисунок 5) нетрудно установить, что дуга AB, по которой катится светлый круг, равна 60°. В новом положении круга после того, как он прокатился по дуге AB (отмечено пунктиром), наивысшее место на его окружности занимает уже не точка A, а точка C, что соответствует повороту точек окружности на 120°, то есть на 1/3 полного оборота.

Дорожка в 120° по дуге CE будет соответствовать 2/3 полного оборота катящегося круга. Итак, получаем один полный оборот.

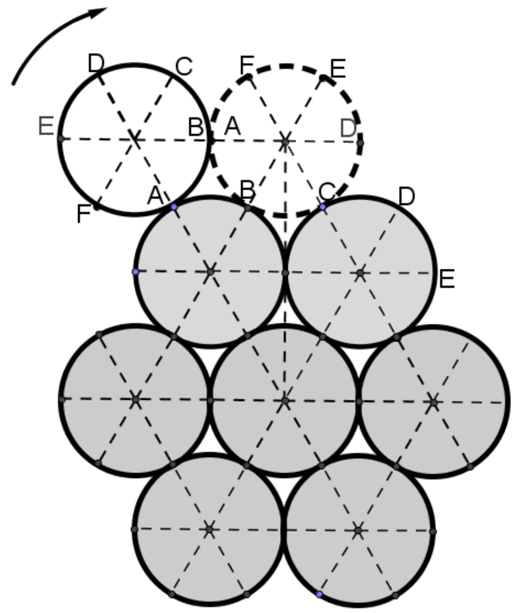

Рисунок 5

Рассуждая аналогично, получаем, что, минуя, шесть дуг в 120°, круг делает: $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$ оборота!

Задание 3. Из листа вырезан круг. Можно ли восстановить перегибанием вписанный в него треугольник, если известно положение середины одной из его сторон, а также то, что один из углов этого треугольника, прилежащих к той же стороне, равен 45°? Если да, то покажите как.

Баллы	Критерии (9 класс)
1	Перегибанием построен вписанный в окружность треугольник с углом в 45°, однако положение точки, являющейся серединой одного из его сторон, подобрано в ходе реализации алгоритма построения. или Теоретические доказана возможность восстановления треугольника по этим данным, но практическая демонстрация возможности восстановления отсутствует, алгоритм восстановления перегибанием не описан и не реализован. или Восстановлена лишь сторона треугольника по ее середине. Остальные построения не выполнены или неверны.
3	Восстановлена сторона треугольника по ее середине. Намечен прямой угол, содержащий одну из построенных вершин треугольника. Остальные построения неверны или построение не завершено.
5	Восстановлена сторона треугольника по ее середине. Намечен прямой угол, содержащий одну из построенных вершин треугольника. Получен сгибанием угол в 45°. Построение треугольника не завершено или остальные построения неверны.
10	Построение треугольника выполнено правильно. Шаги построения не описаны и/или не обоснованы ссылками на теоремы.
15	Построение треугольника выполнено правильно и обосновано.

Решение.

Один из способов построения может быть следующим: сначала найдем центр круга, для этого его нужно дважды сложить помолам. Точка пересечения двух линий будет являться центром.

Так как точка *B* – середина одной из сторон, то следующая линия сгиба это - линия через точку *B* и центр круга (см. рисунок 6). Следующую линию сгиба необходимо сделать перпендикулярно этой прямой через точку *B*. Получаем сторону треугольника *AC*, середина которой – точка *B*, так как перпендикуляр к хорде, опущенный из центра окружности, делит ее пополам. Чтобы построить угол 45°, прилежащий к этой же стороне, необходимо сделать линию сгиба через одну из вершин, например, через точку *A* и центр круга. Получаем прямой угол *ACK*, так как он опирается на половину дуги окружности. Чтобы перегнуть ровно пополам этот угол, необходимо сделать линию сгиба перпендикулярно линии *AK*, линию *OD*. получаем вершину искомого треугольника *ACD*. Остается сделать две линии сгиба, соединяющие точку *D* с вершинами стороны *AC*.

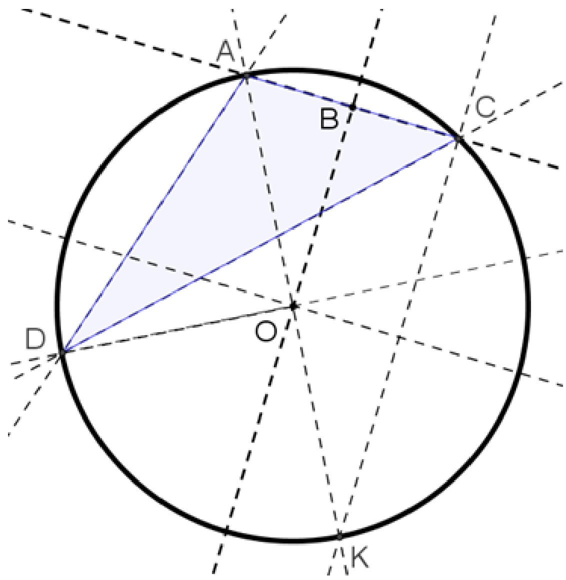

Рисунок 6

Задание 4. Постройте в любой ИГС (GeoGebra, Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) динамически устойчивую модель к рисунку 7. Перечислите свойства, конфигурации, которые вы положили в основу алгоритма построения модели.

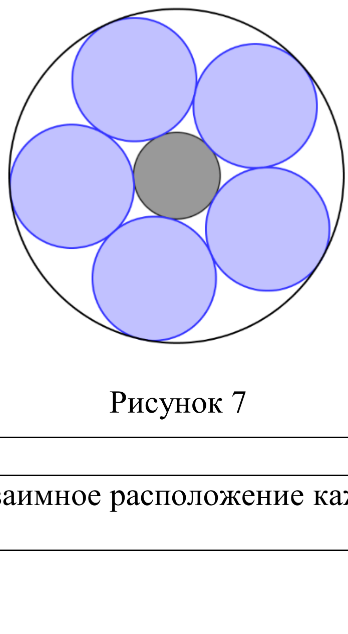
Рисунок 7

Баллы	Критерии (9 класс)
1	Построенная модель соответствует условию задачи, но взаимное расположение каждой пары окружностей не является динамически устойчивым.

5	Построенная модель соответствует условию задачи, однако взаимное расположение не всех окружностей динамически устойчиво. или Модель динамически устойчива, но соответствует не всем требованиям условия задачи.
10	Построенная модель динамически устойчива. Но не указано ни одного свойства, использованного при построении.
15	Построенная модель динамически устойчива. Однако не все использованные при построении свойства перечислены.
20	Построение правильное, построенная модель динамически устойчива. Все значимые для построения свойства конфигурации перечислены.

Решение.

Один из алгоритмов построения модели:

1) Построить окружность произвольного радиуса с центром в точке *O* (см. рисунок 8).

2) Построить произвольную точку *A* на окружности с помощью инструмента Точка на объекте.

3) Построить луч *OA*.

4) С помощью инструмента Поворот на угол повернуть на 72° луч *OA* вокруг точки O.

5) Повторить эти действия еще 4 раза с каждым повернутым лучом.

6) Построить биссектрисы углов, образованными лучами.

7) Построить точки пересечения биссектрис с окружностью.

8) С помощью инструмента Отражение относительно точки построить прообразы точки O относительно этих точек пересечения. Получаем точки M, *F*, *H*, *G*, *K*.

9) Построить правильный пятиугольник MFHGK.

10) Построить точки пересечения сторон пятиугольника с лучами *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE*.

11) С помощью инструмента Середина отрезка найти середины отрезков *OR*, *OS*, *OT*, *OU* и *OV*.

12) Построить с помощью инструмента Отражение относительно точки прообразы этих середин относительно этих точек *R*, *S*, *T*, *U* и *V*.

13) Построить окружность с центрами в этих прообразах и радиусом *OA*.

14) Построить точку пересечения с одной из полученных окружностей с любым лучом (точка *X*).

15) Построить окружность радиусом *OX* с центром в точке *O*.

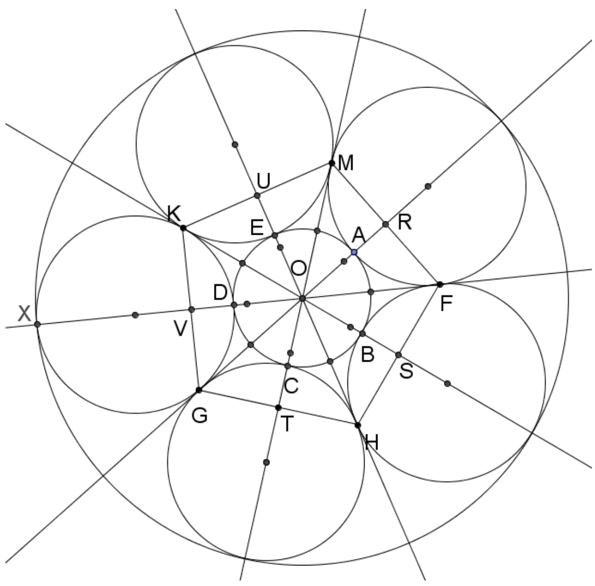

Рисунок 8

Задание 5 *(Задача предложена Р. Николаевым).*

Дана прямая *a,* точки A_1, A_2, A_3, …, A_n в одной полуплоскости относительно прямой *a*. Точки B_1, B_2, B_3, …, B_n ортогональные проекции точек A_i на прямую *a*. Точки C_1, C_2, C_3, …, C_n принадлежат отрезкам B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6, … $B_{n-1}B_n$ соответственно.

Найдите минимальную сумму $(A_iC_i + A_{i+1}C_i)^2$, если $A_iB_i = i$, а $B_iB_{i+1} = n-i+1$.

Баллы	*Критерии (9 класс)*
5	Сделана правильная иллюстрация к условию задачи. Однако нет следов поиска положений точек Ci.
10	Построена правильная динамическая модель или построен правильный чертеж на бумаге. Имеются следы проведения экспериментов, однако выводы не сделаны.
15	Построена правильная динамическая модель или построен правильный чертеж на бумаге. На основе экспериментов определены положения точек Ci. Однако обоснование гипотезы не проведено.
30	Представлено аналитическое или геометрическое решение задачи, либо имеется ссылка на необходимость многократного использования идеи решения задачи Герона.

Решение. В результате эксперимента получаем гипотезу, сумма $A_iC_i + A_{i+1}C_i$ минимальна, когда точки C_i совпадают с точками пересечения прямой *a* с отрезком, соединяющим точки A_i с прообразом точки A_{i+1}, полученным симметрией относительно прямой *a* (см. рис. 9).

Доказательство: решим задачу Герона: *«На плоскости дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой точку M, для которой сумма AM+BM наименьшая».*

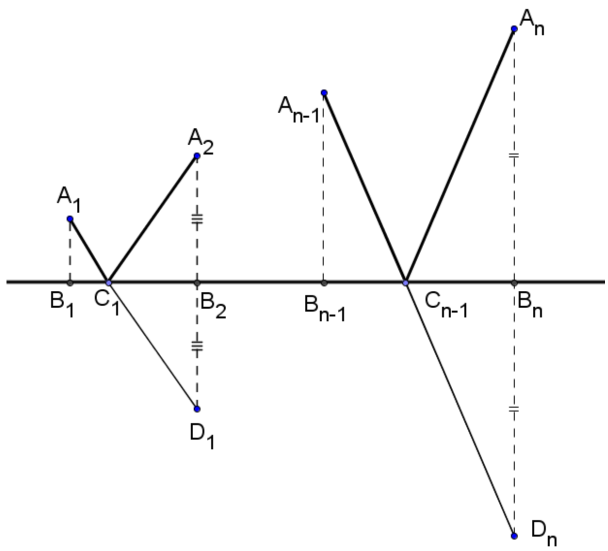

Рисунок 9

Для решения отразим точку B относительно прямой *l*, получим точку *B* (рис. 10). Отрезок *BM* переходит при симметрии в отрезок *B′M*, следовательно, *AM*+*BM*=*AM*+*B′M*. Согласно неравенству треугольника, сумма *AM*+*B′M* принимает наименьшее значение, когда точка *M* лежит на отрезке AB′. Таким образом, *M* — точка пересечения прямой *l* с отрезком *AB′*; для этой точки сумма *AM*+*BM* равна длине отрезка *AB′*, при другом выборе точки *M* эта сумма будет больше *AB′*.

Из доказательства задачи Герона следует, что минимальная сумма $A_iC_i + A_{i+1}C_i$ равна сумме отрезков A_iD_i (см. рисунок 11).

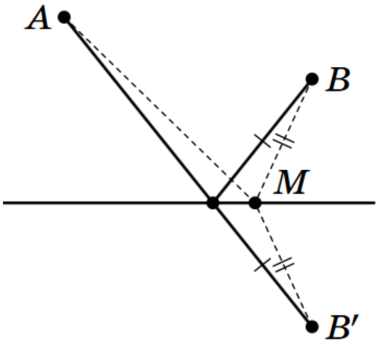

Рисунок 10

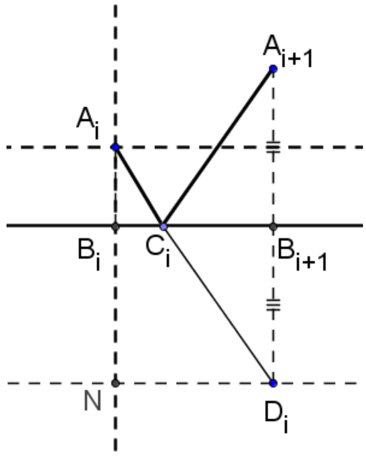

Рисунок 11

Рассмотрим прямоугольный треугольник A_iD_iN:

$$A_iN = A_iB_i + B_iN;\ B_iN = B_{i+1}D_i;\ B_{i+1}D_i = A_{i+1}B_{i+1};\ ND_i = B_iB_{i+1}.$$

По теореме Пифагора $(A_iD_i)^2 = (A_iN)^2 + (ND_i)^2$

Так как $A_iB_i = i$, а $B_iB_{i+1} = n–i+1$, то $(A_iD_i)^2 = (i+2i)^2 + (n–i+1)^2 = 9i^2+(n–i+1)^2$.

Задание 6. Выясните, существуют ли задачи, для решения которых необходимо и достаточно знания двух утверждений: теоремы косинусов и теоремы Пифагора. Если такие задачи существуют, то придумайте как можно больше таких задач.

Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне ИГС (GeoGebra, Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	**Критерии (9 класс)**
1	За каждую задачу, в решении которой используются оба указанных утверждения, но их совокупности недостаточно.
10	За каждую новую составленную задачу, для решения которой необходимо и достаточно указанных двух теорем (новой не считается задача, отличающиеся от предыдущей только варьированием числовых данных).

Возможные формулировки задач:

1. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, углы C и D – прямые, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Найдите косинус угла A.

2. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре описана окружность, которая пересекает сторону AB в точке M, а сторону BC в точке N. Известно, что $AC = 2$, $AB = 3$, $AN = 1,8$. Найдите косинус угла BAC.