ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

Задание 1. Разрежьте данный многоугольник (рис. 1) на четыре части так, чтобы из полученных частей можно было бы сложить квадрат. Измерьте его стороны и вычислите площадь. Сравните ее с площадью исходного многоугольника, объясните результат.

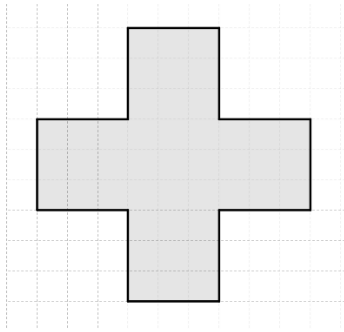

Рисунок 1

Баллы	Критерии
1	Введено допущение о существовании разрезания, но оно не найдено. В этих условиях обоснованно сделан вывод о равенстве площадей (со ссылкой на теорему о равновеликости равносоставленных плоских фигур).
3	Введено допущение о существовании разрезания, но оно не найдено. В этих условиях обоснованно сделан вывод о неравенстве площадей (со ссылкой на погрешности измерения, возможно, дополнительно указана погрешность вычисления). или Найден способ разрезания, но не сделано никаких выводов.
5	Предложен один способ разрезания. Имеется утверждение о равенстве площадей исходной и полученной фигуры, основанное на использовании теоремы.
8	Представлен способ разрезания, длины сторон измерены, площади вычислены, обнаружено неравенство площадей, правильно указаны причины нарушения равенства.

Решение. Если принять сторону квадратной клетки за 1 см, то площадь исходного многоугольника будет равна 45 см^2, так как состоит из пяти квадратов площадью 9 см^2, а сторона квадрата должна равняться $\sqrt{45}$. $\sqrt{45}=\sqrt{36+9}$ — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 6 и 3. Наиболее простой вариант разрезания — на 4 одинаковые части, длины линий разреза равны $\sqrt{45}$, перпендикулярны и пересекаются в центре фигуры (см. рис. 2).

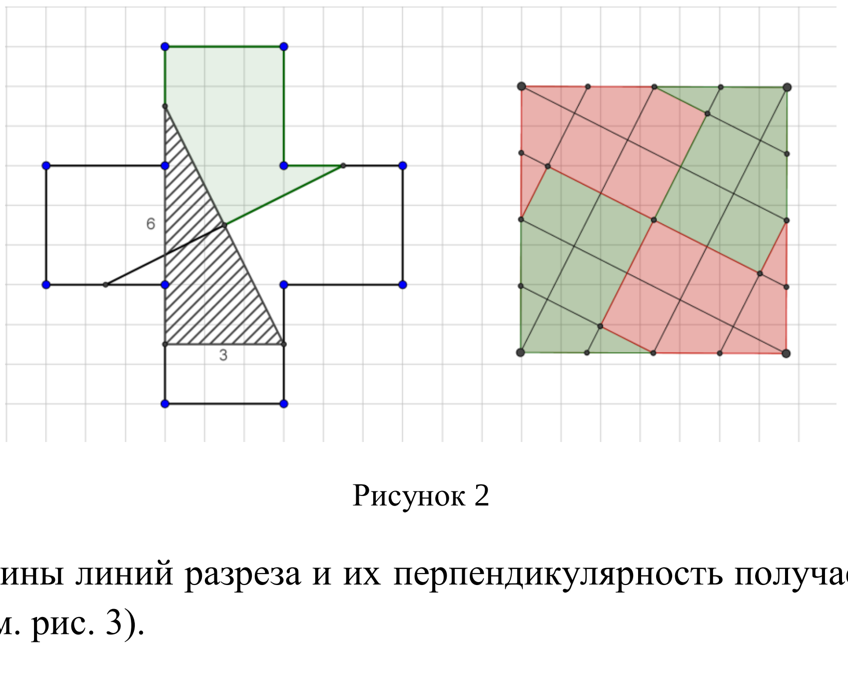

Рисунок 2

Сохраняя длины линий разреза и их перпендикулярность получаем другие способы разрезания (см. рис. 3).

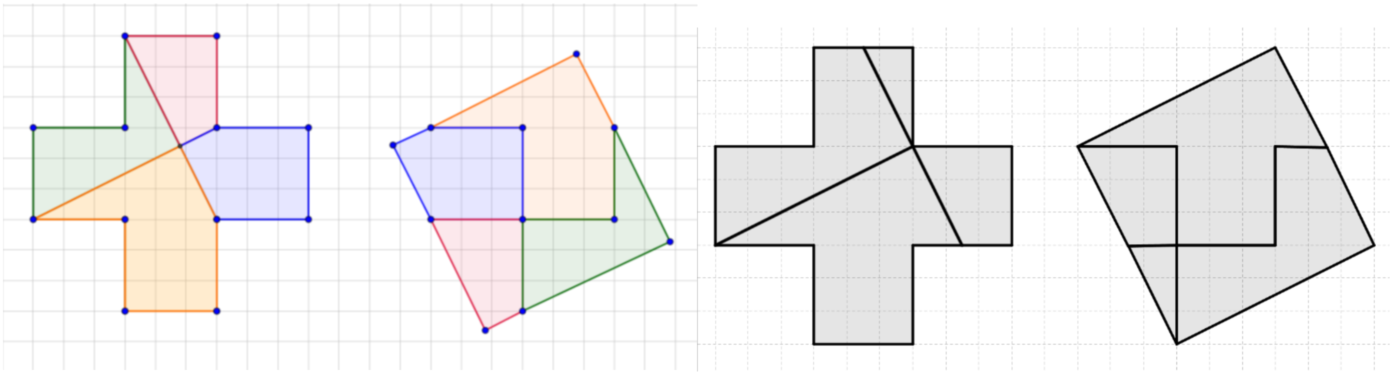

Рисунок 3

Если при решении задачи использовалась длина стороны квадрата, то измерять сторону квадрата и сравнивать площади не требуется. Если же задача решена с помощью догадки, то объяснение требуется.

Находим площадь квадрата. Наблюдаем кажущееся различие площадей.

Этот парадокс о кажущемся нарушении теоремы о равновеликости равносоставленных фигур: «каждую плоскую фигуру с прямолинейными границами можно преобразовать в любую другую равновеликую первой фигуру того же типа, разрезав предварительно исходную фигуру на конечное число частей» объясняется неточностью измерений, оперированием с приближенными значениями при вычислении и неточностью складывания фигуры из частей.

Задание 2. (Задача Я.И. Перельмана / Занимательная геометрия)

Перед вами неподвижный правильный шестиугольник. По его периметру катится круг. На сколько оборотов больше сделает круг, если он покатится по сторонам шестиугольника, а не по его выпрямленному периметру? Опишите свои рассуждения.

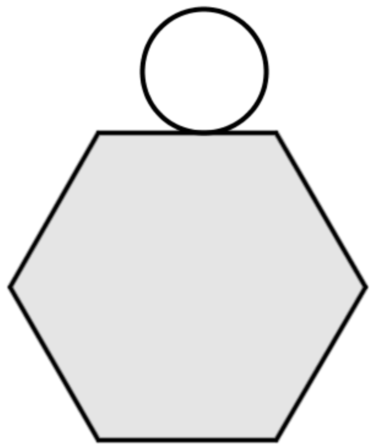

Рисунок 3

Баллы	Критерии
1	Дан правильный или неправильный ответ без описания способа его получения, но при этом указано, что полученный результат является приближенным.
6	Дан правильный ответ (без указания его приближенности), описан ход эксперимента (вещественного или мысленного) в результате которого он был получен.
8	Дан правильный ответ, описан только ход эксперимента (вещественного или мысленного) в результате которого он был получен. Указано, что результат может быть неточным, так как получен в результате эксперимента.
10	Дан правильный ответ, представлен или описан эксперимент, результаты которого теоретически обоснованы.

Решение.

Представим себе перемещение подвижного круга радиуса r из точки A по прямой AC (см. рисунок 4). Сделав пол-оборота на отрезке AC, длина которого равна половине длины окружности катящегося круга (πr), надломим отрезок AB в его середине C и повернем звено CB на угол α относительно первоначального положения.

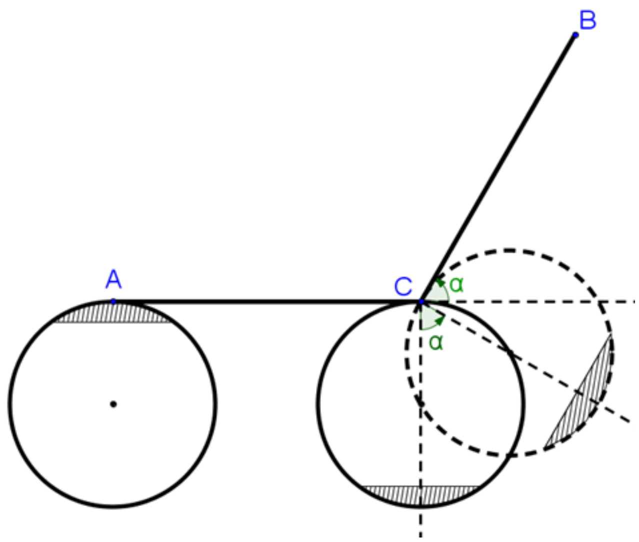

Рисунок 4

Теперь круг, чтобы занять такое положение, при котором он будет касаться в точке *C* прямой *CB*, повернется вместе со своим центром на угол, равный α (эти углы равны как имеющие взаимно перпендикулярные стороны). В процессе этого поворота круг катится *без продвижения по отрезку*. Вот это и создает здесь дополнительную часть полного оборота сравнительно с качением по прямой.

Дополнительный поворот составляет такую часть полного оборота, какую составляет угол α от угла 2π, то есть $\frac{\alpha}{2\pi}$. Вдоль отрезка *CB* круг сделает тоже пол-оборота, так что всего при движении по ломаной *ACB* он сделает $1+\frac{\alpha}{2\pi}$ оборотов.

Теперь нетрудно представить себе, сколько оборотов должен сделать круг, катящийся снаружи по сторонам выпуклого правильного шестиугольника (рисунок 3). Очевидно, столько, сколько раз он обернулся бы на прямолинейном пути, равном периметру (то есть сумме сторон) шестиугольника, *плюс* число оборотов, равное сумме внешних углов шестиугольника деленной на 2π.

Таким образом, обходя шестиугольник, круг сделает одним оборотов больше, чем при движении по прямолинейному отрезку, равному периметру шестиугольника.

Задание 3.

Из листа вырезан круг. Назовем треугольник вписанным в круг, если все его вершины лежат на границе круга, т.е. на его окружности. Нужно восстановить перегибанием вписанный в него треугольник, если известно положение лишь одной из его вершин и середина одной из сторон. Обоснуйте правильность построений.

Баллы	Критерии (8 класс)
1	Положение данных точек А и/или В подобраны под реализуемый алгоритм построения. Построения треугольника выполнены. Анализ остальных ситуаций не проведен.
3	Выполнены построения для одного из случаев: 1) В - середина стороны с данной вершиной А. Утверждается, что треугольник можно построить лишь при условии, что хорда ВА перпендикулярна диаметру, проходящему через точку В. Нет замечания о множественности результатов построения для такого случая. 2) В лежит на стороне, противолежащей данной вершине А. Построения не обоснованы.
5	Выполнены построения для двух из случаев: 1) В - середина стороны с данной вершиной А. Утверждается, что треугольник можно построить лишь при условии, что хорда ВА перпендикулярна диаметру, проходящему через точку В. Нет замечания о множественности результатов построения для такого случая. 2) В лежит на стороне, противолежащей данной вершине А. Построения не обоснованы.
8	Восстановлен треугольник с опорой на допущение, что В лежит на стороне, противолежащей данной вершине А. Отказ от рассмотрения другого варианта расположения точки В не обоснован и не прописан.
10	Проведен анализ всех возможных случаев расположения точки В. Обосновано выбрано положение точки В на стороне, противолежащей вершине А. Треугольник восстановлен. Однако, шаги построения не обоснованы ссылками на теоремы.
15	Проведен анализ всех возможных случаев расположения точки В. Обосновано выбрано положение точки В на стороне, противолежащей вершине А. Треугольник восстановлен. Шаги построения обоснованы ссылками на теоремы.

Решение.

Сначала необходимо найти центр круга, для этого его нужно дважды сложить пополам. Точка пересечения двух линий будет являться центром.

1 случай: точка A лежит на окружности, точка B – середина одной из сторон, которая содержит точку А.

В этом случае первая линия сгиба будет линия AB, перпендикулярная диаметру, проходящему через точку B, получаем вторую вершину треугольника – точку D (см. рисунок 5). Третью вершину можно выбрать произвольно, что говорит о множественности результатов построения для такого случая. Пусть третья вершина – точка С лежит на диаметральной прямой, перпендикулярной к хорде AB. Остается сделать две линии сгиба CA и CD. Треугольник построен.

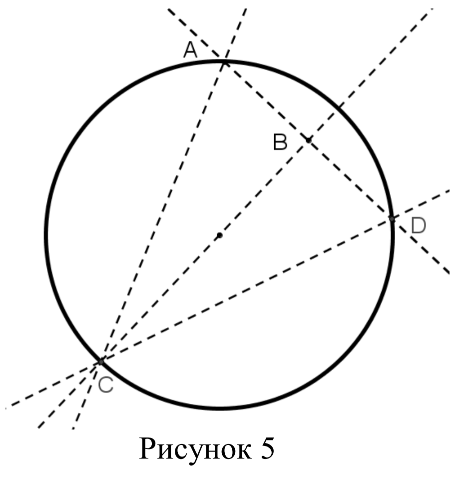

Рисунок 5

2 случай: точка *A* лежит на окружности, точка *B* – середина одной из сторон, которая не содержит точку A.

Первая линия сгиба – это линия через точку B и центр круга (см. рисунок 6). Следующую линию сгиба необходимо сделать перпендикулярно этой прямой через точку B. Получаем сторону треугольника CD, середина которой – точка B, так как перпендикуляр к хорде, опущенный из центра окружности, делит ее пополам. Остается сделать две линии сгиба, соединяющие точку A с вершинами полученной стороны.

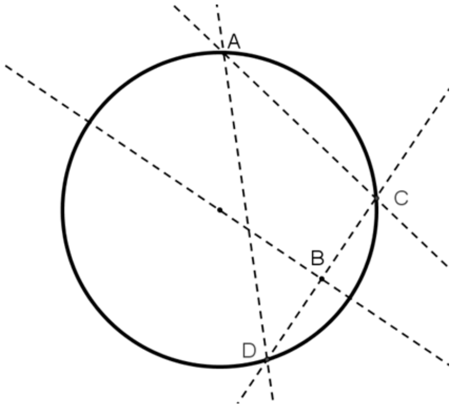

Рисунок 6

Задание 4. Постройте в любой ИГС (GeoGebra, Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) динамически устойчивую модель конфигурации к рисунку 7, то есть модель, сохраняющую взаимное расположение и вид геометрических фигур. Произвольно изменяться на модели должны только размеры квадрата и положение точки на его стороне, задающей треугольники. Перечислите свойства, конфигурации, которые вы положили в основу алгоритма построения модели.

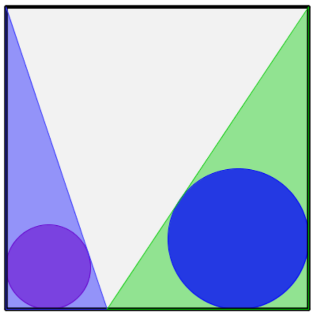

Рисунок 7

Баллы	Критерии (8 класс)
1	Построенная модель, соответствует условию задачи, но она не является динамически устойчивой.
5	Построенная модель, соответствует условию задачи, однако не все требуемые свойства модели динамически устойчивы: 1) четырехугольник не сохраняет форму квадрата; 2) одна или обе окружности не сохраняют свойство быть вписанным в треугольник.
10	Построенная модель динамически устойчива, однако, требуемая динамика не сохранена и не сформулированы теоретические положения, которые использованы при построении.
15	Построенная модель динамически устойчива, однако не выполнено одно из двух условий: 1) требуемая динамика не сохранена; 2) не сформулированы факты, использованные при построении.

20	Построение правильное, построенная модель динамически устойчива. Требуемая динамика конфигурации сохранена. Сформулированы все факты, использованные при построении.

Решение.

Один из алгоритмов построения модели:

1) Построить квадрат с помощью инструмента Правильный многоугольник (см. рисунок 8).

2) На стороне AB с помощью инструмента Точка на объекте произвольно построить точку E.

3) С помощью инструмента Многоугольник построить треугольники ADE и CBE.

4) Чтобы вписать окружность в треугольник необходимо построить точку пересечения биссектрис и опустить из нее на любую из сторон перпендикуляр.

5) Построить окружность с помощью инструмента Окружность по центру и точке.

6) Аналогично вписать окружность во второй треугольник.

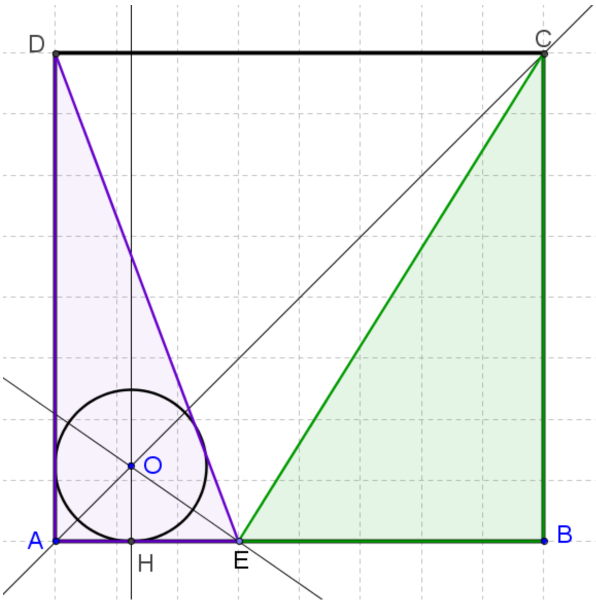

Рисунок 8

Задание 5. *(Задача предложена Р. Николаевым).*

Дан прямоугольник $ABCD$, где AB= 3 см, AD = 4 см. Внутри прямоугольника две точки M и N такие, что расстояние от M до стороны AB равно 1 см, до стороны AD – 2 см; расстояние от точки N до стороны CD равно 2 см, до стороны AD 1 см. На сторонах прямоугольника AB, BC, CD, AD произвольно взяты точки Q, R, S и T соответственно. Найдите такие положения точек Q, R, S и T, при которых сумма $MQ+MR+MS+MT+NQ+NR+NS+NT$ будет минимальна.

Баллы	Критерии (8 класс)
5	Построена правильная динамическая модель или построен правильный чертеж на бумаге. Однако, следов проведения эксперимента и выводов нет. или Сделанные на основе экспериментов выводы неверны.
10	Построена правильная динамическая модель или построен правильный чертеж на бумаге. Имеются следы проведения эксперимента, но выводы на его основе не сделаны.
15	Построена правильная динамическая модель или построен правильный чертеж на бумаге. Выдвинута гипотеза о положении точек на сторонах квадрата, но доказательство не

	проведено.
30	Геометрически найдено верное положение точек на сторонах прямоугольника, основанное явно или неявно на идее решения задачи Герона. или Представлено правильное аналитическое решение задачи.

Решение.

В результате эксперимента получаем гипотезу, что сумма $MQ+MR+MS+MT+NQ+NR+NS+NT$ минимальна, когда точка Q совпадает с точкой пересечения отрезка AB и луча NM'_1, где точка M'_1 – прообраз точки M, симметричный относительно прямой AB; R совпадает с точкой пересечения отрезка BC и луча NM', где точка M' – прообраз точки M, симметричный относительно прямой BC; S – совпадает с точкой пересечения отрезка CD и луча MN'_1, где точка N'_1 – прообраз точки N, симметричный относительно прямой CD; T – совпадает с точкой пересечения отрезка AD и луча MN', где точка N' – прообраз точки N, симметричный относительно прямой AD; и примерно равна 14,6 см (см. рисунок 11).

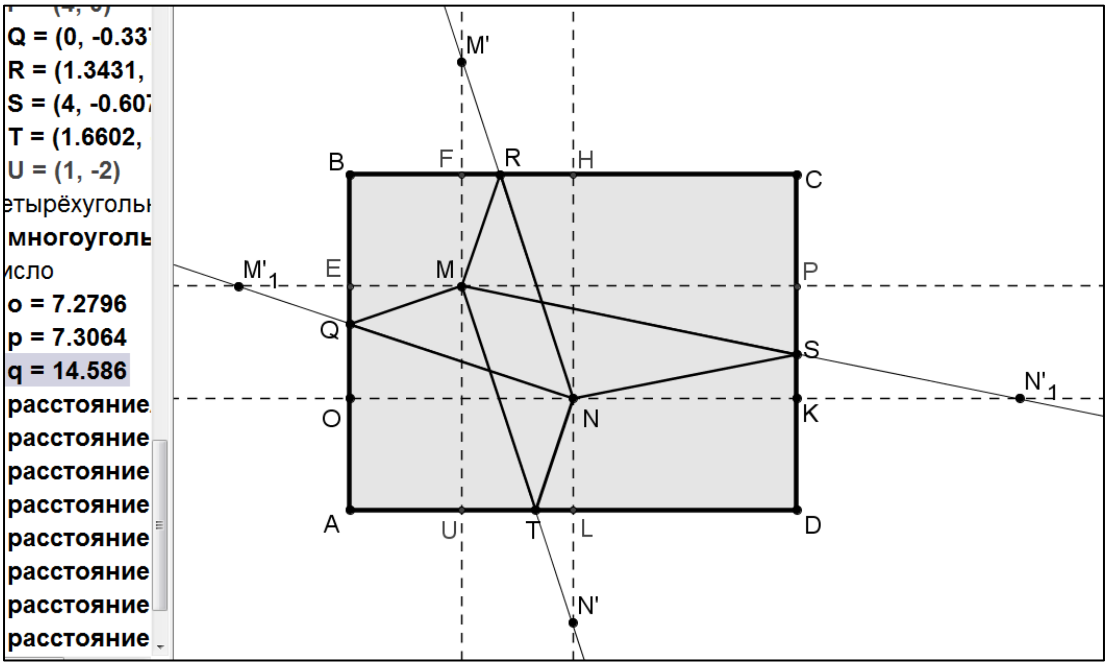

Рисунок 11

Доказательство:

Для доказательства выдвинутой гипотезы решим задачу Герона: *«На плоскости дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой точку M, для которой сумма $AM+BM$ наименьшая».*

Для ее решения отразим точку B относительно прямой l, получим точку B (рисунок 12). Отрезок BM переходит при симметрии в отрезок $B'M$, следовательно, $AM+BM=AM+B'M$. Согласно неравенству треугольника, сумма $AM+B'M$ принимает наименьшее значение, когда точка M лежит на отрезке AB'. Таким образом, M — точка пересечения прямой l с отрезком AB'; для этой точки сумма $AM+BM$ равна длине отрезка AB', при другом выборе точки M эта сумма будет больше AB'.

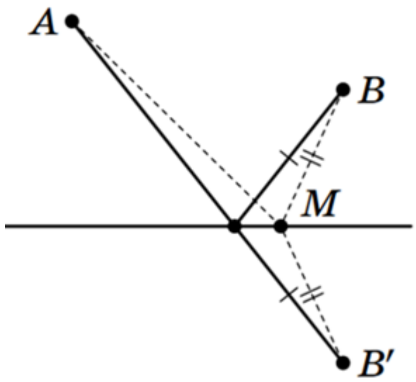

Рисунок 12

Из доказательства задачи Герона следует, что сумма $MQ+MR+MS+MT+$ $+NQ+NR+NS+NT$ минимальна тогда, когда точки Q, R, S и T принадлежат отрезкам NM'_1, NM', MN'_1, MN' соответственно.

Задание 6. Выясните, существуют ли задачи, для решения которых необходимо и достаточно знания двух утверждений: теоремы Пифагора и теоремы о вписанных углах. Если такие задачи существуют, то придумайте как можно больше таких задач.

Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне ИГС (GeoGebra, Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии (8 класс)
Оценивается каждая составленная задача отдельно. Баллы суммируются.	
1	За каждую задачу, в решении которой используются оба указанных утверждения, но их совокупности недостаточно.
10	За каждую новую составленную задачу, для решения которой необходимо и достаточно указанных двух теорем (новой не считается задача, отличающиеся от предыдущей только варьированием числовых данных).

Возможные формулировки задач:

1. Треугольник ABC вписан в окружность, сторона AB равна 3 см, сторона BC равна 4 см, дуга AC равна 180°, найдите сторону BC.
2. Треугольник ABC со сторонами 13, 12 и 5 вписан в окружность. Найдите радиус окружности.
3. Прямоугольный треугольник ABC с целочисленными сторонами, две из которых равны 6 и 10, вписан в окружность. Найдите радиус окружности.
4. Найдите стороны равнобедренного прямоугольного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2.
5. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 7$, $BC = 24$. Точки A, C и D делят окружность на три дуги, градусные величины которых относятся как 9 : 8 :1 . Найдите диагональ AC четырехугольника $ABCD$.