

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

Задание 1. Разрежьте данный многоугольник (рисунок 1) на три части так, чтобы из полученных частей можно было бы сложить квадрат. Измерьте его стороны и вычислите площадь. Сравните ее с площадью исходного многоугольника, объясните результат.

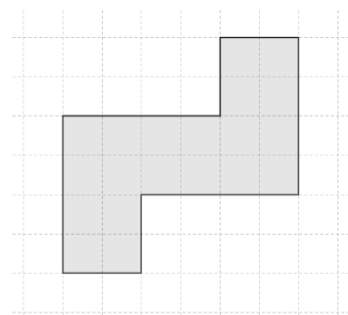


Рисунок 1

Баллы	Критерии
1	Способ разрезания не предложен, но представлено обоснование некорректности задачи, основанное на незнании существования иррациональных чисел. или Введено допущение о существовании разрезания, но оно не найдено. В этих условиях обоснованно сделан вывод о равенстве площадей (со ссылкой на теорему о равновеликости равноставленных плоских фигур).
3	Введено допущение о существовании разрезания, но оно не найдено. В этих условиях обоснованно сделан вывод о неравенстве площадей (со ссылкой на погрешности измерения, возможно, дополнительно указана погрешность вычисления).
5	Предложен один способ разрезания. Имеется утверждение о равенстве площадей исходной и полученной фигуры, основанное на использовании теоремы.
8	Представлен способ разрезания, длины сторон измерены, площади вычислены, обнаружено неравенство площадей, правильно указаны причины нарушения равенства.

Решение. Если принять сторону квадратной клетки за 1 см, то площадь исходного многоугольника будет равна 20 см^2 , так как состоит из пяти квадратов площадью 4 см^2 . Разрезать исходный многоугольник на три части, которые после перераспределения образуют квадрат можно двумя способами (см. рисунок 2а и 2б).

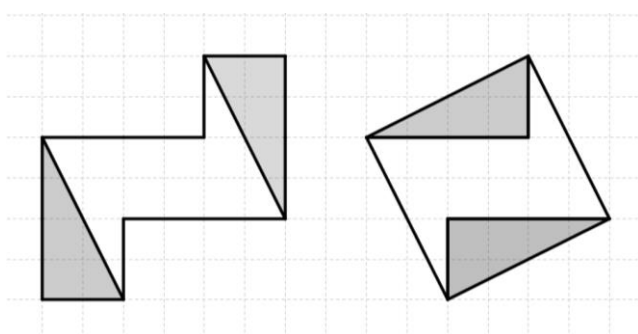


Рисунок 2а

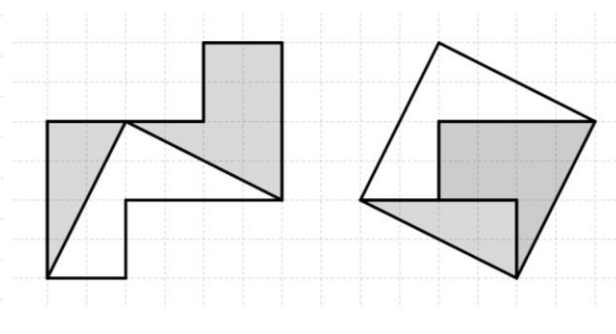


Рисунок 2б

Находим площадь квадрата. Наблюдаем кажущееся различие площадей.

Этот парадокс о кажущемся нарушении теоремы о равновеликости равноставленных фигур: «каждую плоскую фигуру с прямолинейными границами можно преобразовать в любую другую равновеликую первой фигуры того же типа, разрезав предварительно исходную фигуру на конечное число частей» объясняется неточностью измерений, оперированием с приближенными значениями при вычислении и неточностью складывания фигуры из частей.

Задание 2. Перед вами два неподвижных темных круга, по которым без скольжения катится светлый круг, радиусы всех кругов одинаковы (рисунок 3). Сколько оборотов сделает светлый круг, обойдя темные один раз? Опишите свои рассуждения.

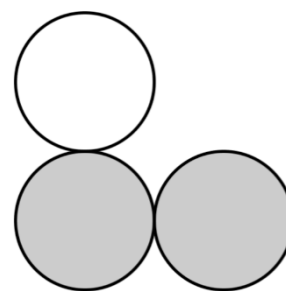


Рисунок 3

Баллы	Критерии
1	Дан правильный или неправильный ответ без описания способа его получения, но при этом указано, что полученный результат является приближенным.
6	Дан правильный ответ (без указания его приближенности), описан ход эксперимента (вещественного или мысленного) в результате которого он был получен.
8	Дан правильный ответ, описан только ход эксперимента (вещественного или мысленного) в результате которого он был получен. Указано, что результат может быть неточным, так как получен в результате эксперимента.
10	Дан правильный ответ, описан ход эксперимента, результаты которого теоретически обоснованы.

Решение.

Эксперимент можно провести практически, например, с монетами: возьмем три монеты одинакового достоинства, расположим их, как показано на рисунке, и, прижимая к столу две монеты, прокатим по ним третью. Для определения числа оборотов будем следить за положением цифры на монете. Когда цифра примет первоначальное положение, монета обернется вокруг своего центра один раз.

Теперь выясним верность эксперимента с помощью расчетов. Представим себе перемещение подвижного круга из точки A в ложбинку между двумя неподвижными кругами (см. рисунок 4).

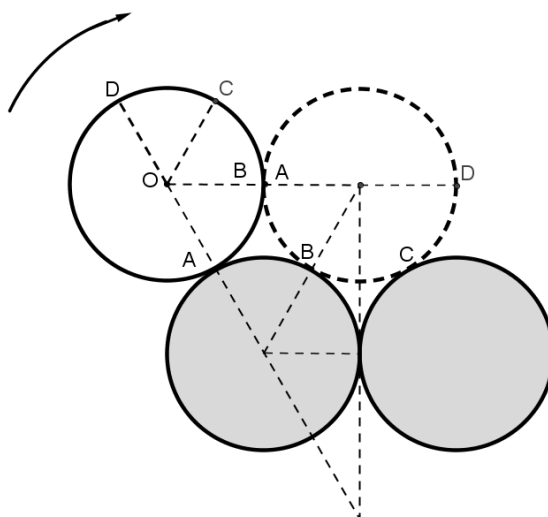


Рисунок 4

По чертежу нетрудно установить, что дуга AB , по которой катится светлый круг, равна 60° . В новом положении круга после того, как он прокатился по дуге AB (отмечено пунктиром), наивысшее место на его окружности занимает уже не точка A ,

а точка C , что соответствует повороту точек окружности на 120° , то есть на $\frac{1}{3}$ полного оборота.

Дорожка в 120° по дуге CE (см. рисунок 5) будет соответствовать $\frac{2}{3}$ полного оборота катящегося круга. Итак, получаем один полный оборот (обозначено штриховкой).

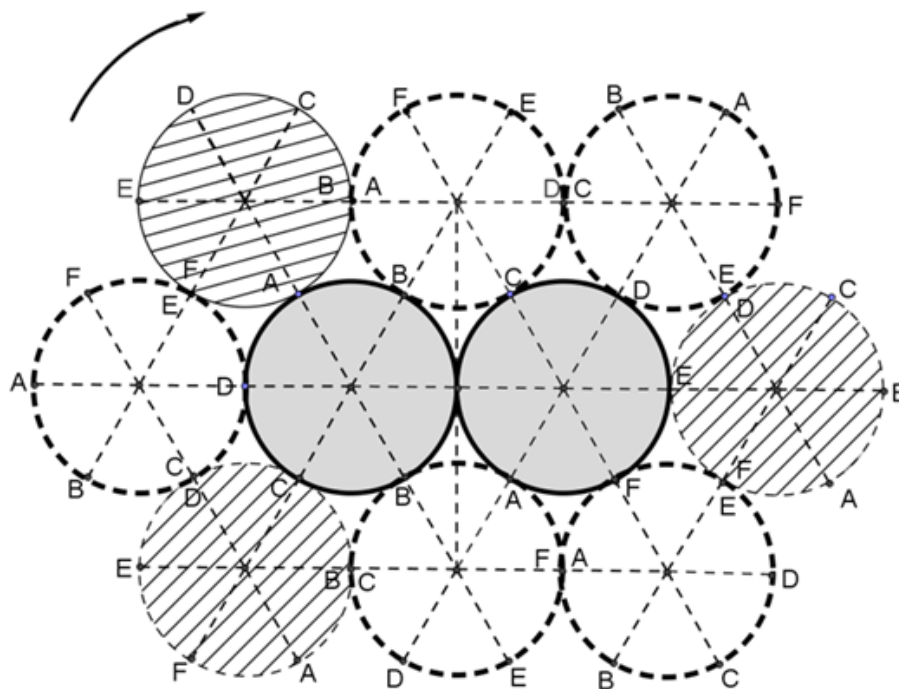


Рисунок 5

Далее, аналогично, минуя дорожку в 120° по дуге EA и в 60° по дуге BC , получаем второй полный оборот.

Возвращаясь в исходное положение, круг делает поворот еще на $\frac{2}{3}$ полного оборота, так как катится по дуге CA в 120° .

Таки образом, светлый круг делает $2\frac{2}{3}$ оборота, обойдя темные круги один раз.

Задание 3. На листе бумаги даны две точки: точка B – одна из вершин при основании равнобедренного треугольника, и точка M – точка, лежащая на середине боковой стороны, не содержащей точку B . С помощью перегибания листа бумаги получите равнобедренный треугольник. Обоснуйте правильность построений.

Баллы	Критерии (7 -9 классы)
1	Треугольник построен, но при построении не использованы знания признаков равнобедренного, равностороннего треугольника.
3	Построения треугольника не завершены и в описании способа построения есть указания на некоторые, но не все ключевые факты.
5	Построения треугольника не завершены, но в описании способа перечислены все необходимые для завершения построений факты.
10	Сгибанием построен равносторонний или равнобедренный треугольник общего вида с опорой на знания теоретических фактов, но они не представлены в описании способа построения.
15	Построен равносторонний треугольник, в описании способа построения есть ссылки на использованные теоретические факты. или Экспериментально выявлены или найдены в Интернет сведения о свойствах

треугольников, значимых для построения: свойство точки пересечения медиан и/или свойство средней линии треугольников. Выполнены построения равнобедренного (неравностороннего) треугольника со ссылкой на эти факты.
--

Решение.

Один из способов построения треугольника следующий:

Первая линия сгиба – это линия, соединяющая точки В и М. Следующую линию сгиба можно сделать через точку В произвольно так, чтобы она не совпадала с прямой ВМ, поэтому решений данной задачи будет бесконечно много. Так как известно, что М – это середина стороны, то отрезок ВМ – это одна из медиан искомого треугольника. Зная, что медианы треугольника пересекаются и делятся точкой пересечения на отрезки в отношении 2:1, следующими линиями сгиба будут две линии, делящие отрезок ВМ на три части, сделанные перпендикулярно линии ВМ. Получаем точку пересечения медиан треугольника - точку D (см. на рисунке 6). Пятая линия сгиба – это линия, сделанная через точку D, перпендикулярно линии, содержащей точку В.

Теперь найдем точку, симметричную точке В относительно пятой линии сгиба, она и будет являться второй вершиной при основании треугольника. Для этого сгибаем лист по этой прямой и определяем, куда падает отражение точки В. Через прообраз точки В и точку М делаем шестую линию сгиба и определяем местоположение вершины треугольника, лежащей против основания. Седьмая линия сгиба соединяет эту вершину с точкой В. Равнобедренный треугольник восстановлен, но таких треугольников по этому алгоритму можно построить бесконечно много.

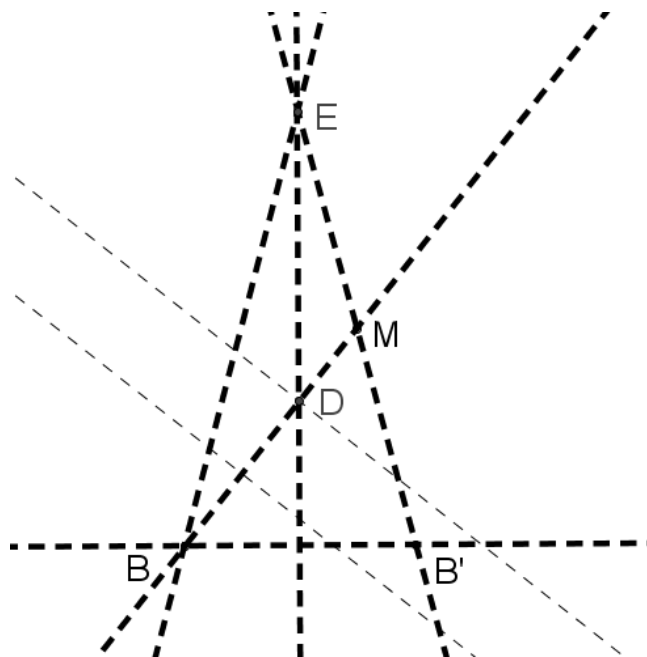


Рисунок 6

Задание 4. Постройте в любой ИГС (GeoGebra, Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) модель, изображённой на рисунке 7 конфигурации. Взаимное расположение фигур и их вид не должны меняться при перемещении точек модели, выбранных произвольно. Перечислите свойства конфигурации, которые вы положили в основу алгоритма построения модели.

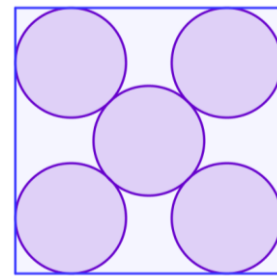


Рисунок 7

Баллы	Критерии (7 класс)
1	Построена модель, однако взаимное расположение окружностей не является динамически устойчивым, четырехугольник не сохраняет форму квадрата.
5	Построена модель, соответствующая условию задачи, однако не все свойства, заданные условием задачи, являются динамически устойчивыми.
10	Построенная модель динамически устойчива. Описание способа построения отсутствует или не опирается на свойства конфигурации.
15	Построенная модель динамически устойчива. Однако, описание построения не полное, или в нем нет всех необходимых ссылок на использованные свойства.
20	Построение правильное, построенная модель динамически устойчива. В описании построения включены все использованные свойства.

Решение.

Один из алгоритмов построения модели:

- 1) Построить произвольно две перпендикулярные прямые.
- 2) Построить биссектрисы прямых углов.
- 3) Построить окружность произвольного радиуса с центром в точке пересечения прямых.
- 4) Построить точки пересечения окружности с биссектрисами – точки A, B, C, D (см. рисунок 8).

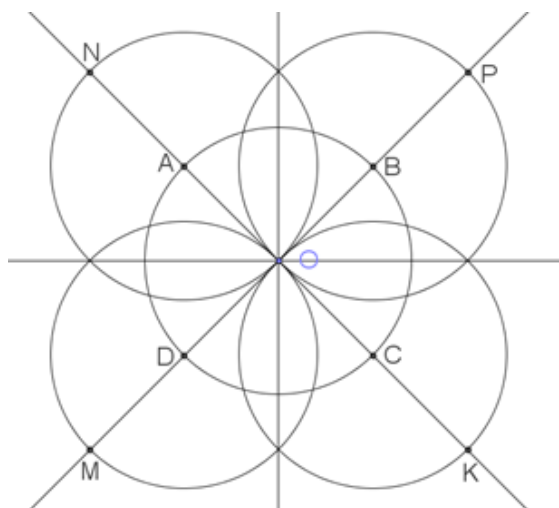


Рисунок 8

- 5) Построить окружности того же радиуса с центрами в точках A, B, C, D .
- 6) Отметить точки пересечения этих окружностей с биссектрисами (точки K, M, N, P), после чего скрыть окружности.
- 7) Построить окружности того же радиуса с центрами в этих точках.
- 8) Построить прямую, соединяющую точки M и N (см. рисунок 9).

9) Построить точки пересечения этой прямой с окружностями, центрами которых являются точки M и N . Получаем точки H и F (рис. 9).

10) Построить через эти точки прямые параллельно прямой OE (рис.10).

11) Построить точки пересечения этих прямых с биссектрисами.

12) С помощью инструмента Правильный многоугольник построить квадрат $QRST$.

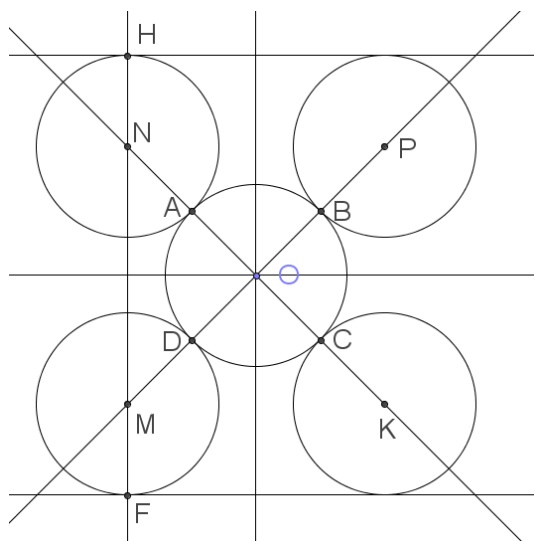


Рисунок 9

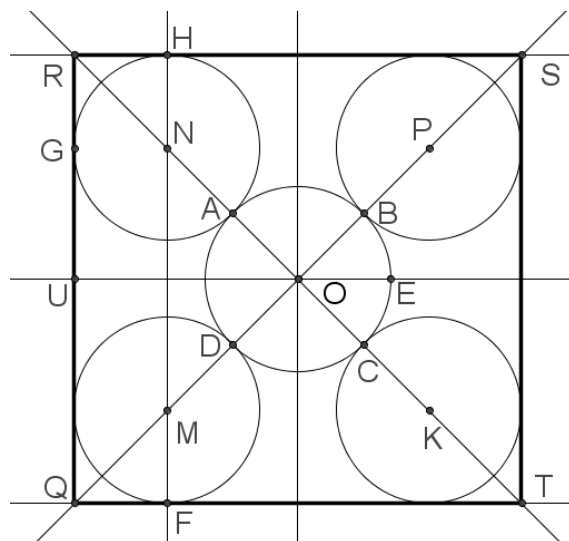


Рисунок 10

Задание 5 (Задача предложена Р. Николаевым).

Четырехугольник называется невыпуклым, если он не лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. Дан невыпуклый четырехугольник $ABCD$, где угол ADC больше 180° . Внутри четырехугольника произвольно взята точка M . Найти все возможные положения точки M , при которых сумма расстояний от точки M до вершин четырехугольника $ABCD$ будет больше или равна сумме расстояний от вершины D до вершин A, B и C .

Баллы	Критерии (7 класс)
5	Имеются свидетельства того, что термин «невыпуклый четырехугольник» правильно осмыслен. Построена модель или сделан правильный чертеж, к условию задачи. Следов проведения эксперимента нет и/или модель не устойчива.
10	Построена правильная динамическая модель или построен правильный чертеж на бумаге. Имеются следы проведения эксперимента, однако выводы на его основе не сделаны.
15	Построена правильная динамическая модель или построен правильный чертеж на бумаге. Имеются следы проведения эксперимента, выдвинута гипотеза на основе полученных данных, однако доказательство не проведено.
30	Построена правильная динамическая модель или построен правильный чертеж на бумаге. Сделана прикидка результата на основе компьютерного эксперимента и доказана или доказано решение без эксперимента

Решение.

В результате эксперимента получаем гипотезу, что все возможные положения точки M , при которых сумма расстояний от точки M до вершин четырехугольника $ABCD$ будет больше или равна суммы расстояний от вершины D до вершин A, B и C –

это весь четырехугольник $ABCD$, равенство получаем тогда, когда точка M совпадает с точкой D .

Одно из возможных доказательств:

Пусть точка M – произвольная фиксированная точка внутри четырехугольника $ABCD$ (рис. 11). Нужно доказать, что справедливо неравенство:

$$MA+MB+MC+MD \geq AD+BD+CD \quad (1)$$

Из неравенства треугольника следует:

$$MB+MD \geq BD \quad (2)$$

Проведем продолжение AD до пересечения с MC . Обозначим точку пересечения E . Тогда $MA+MC = MA+ME+EC$.

Из неравенства треугольника следует:

$$MA+ME \geq AE=AD+DE \quad (3)$$

$$DE+EC \geq DC \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) следует, что

$$MA+MB+MD+MC \geq AD+BD+ME+EC \geq BD+AD+DE+EC \geq BD+AD+DC.$$

Левая и правая часть этого неравенства образуют (1).

Задание 6. Выясните, существуют ли задачи, для решения которых необходимо и достаточно знания двух утверждений: теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника и второго признака равенства треугольников. Если такие задачи существуют, то придумайте как можно больше таких задач.

Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне ИГС (GeoGebra, Живая геометрия, Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

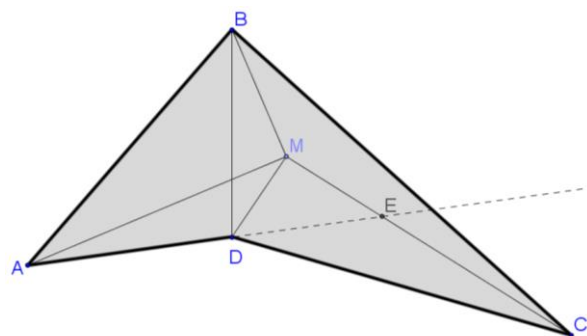


Рисунок 11

Баллы	Критерии (7 класс)
Оценивается каждая составленная задача отдельно. Баллы суммируются.	
1	За каждую задачу, в решении которой используются оба указанных утверждения, но их совокупности недостаточно.
10	За каждую новую составленную задачу, для решения которой необходимо и достаточно указанных двух теорем (новой не считается задача, отличающиеся от предыдущей только варьированием числовых данных).

Возможные формулировки задач:

- Даны два равнобедренных треугольника ABC и ADC с общим основанием AC . Угол BAC равен углу CAD . Докажите, что треугольники ABC и ADC равны.
- Докажите признак равенства равнобедренных треугольников: Если сторона и угол при основании одного равнобедренного треугольника равны стороне и углу при основании другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.
- Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с недоступной вершиной B . Как измерить его боковую сторону?