

Турнир по экспериментальной математике

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

Задание 1 (маx 8 баллов). Вырежьте из бумаги квадрат со стороной 8 см. Разрежьте его так, как показано на рисунке 1. Сложите из его частей прямоугольник так, как показано на рисунке 2. Сравните площади квадрата и прямоугольника. Объясните результат.

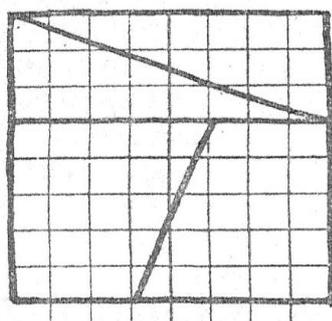


Рисунок 1

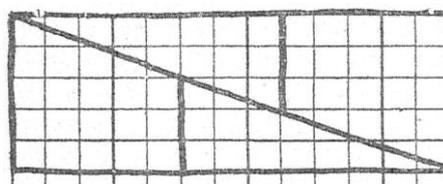


Рисунок 2

Баллы	Критерии
1	Выполнены: разрезание, перекладывание, измерения и вычисления (все действия правильные) или сформулировано утверждение, которое делает бессмысленным выполнение практических действий.
3	Сделан вывод о том, что полученное приближенное равенство (неравенство) площадей – результат погрешностей практических действий, а не нарушения теоретического факта.
5	Названа одна причина появления погрешности.
8	Указаны несколько причин появления погрешности.

Решение задания 1. Известно, что равноставленные планиметрические фигуры – равновелики. Однако, на практике можно говорить лишь о приближенном равенстве равноставленных фигур. Это и подтвердил проведенный нами эксперимент, в котором требовалось *вырезать* квадрат, *разрезать* его и *составить* из него новую фигуру, *похожую на прямоугольник*, *применить* для вычисления ее площади формулу прямоугольника, *измерением* найти его стороны.

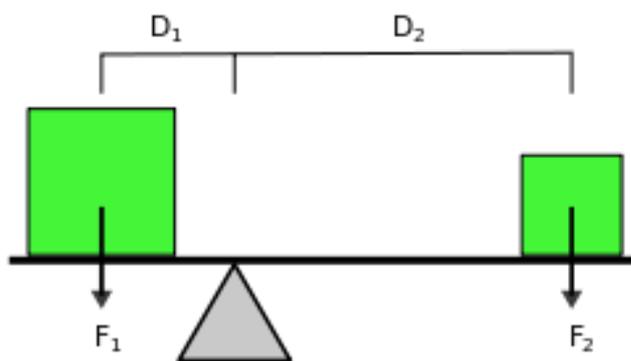
Все выделенные действия являются неустранимыми причинами появления (нарастания) погрешностей: погрешность измерения, погрешность выбора метода вычисления, погрешность вычисления. Ими объясняется полученное в ходе эксперимента неравенство площадей.

Задание 2 (маx 10 баллов). В равностороннем треугольнике ABC (тонкой треугольной однородной пластине) провели медиану AM. На ней отметили точку O, так что $AO:OM = m:n$, где m и n – целые числа. Опишите эксперимент, позволяющий

методом взвешивания найти значения m и n . Перечислите оборудование, которое Вам для его проведения понадобится.

Баллы	Критерии
3	Найдена идея применения взвешивания.
6	Перечислен полный набор необходимого оборудования.
10	Описан план проведения экспериментальных работ и обработки данных эксперимента.

Решение задания 2. (Один из возможных вариантов) *Оборудование:* 1) набор гирь одинаковой массы; 2) штатив для закрепления нити; 3) нить для подвеса пластины и гирь; 4) инструмент для того, чтобы проделать отверстия в пластине. *Ход эксперимента:* Подвесить пластину на нити, прикрепленной в точке O . В вершинах пластины подвешивать гири до тех пор, пока пластина не примет горизонтальное положение. Подсчитать количество гирь подвешенных в каждой из вершин. Пусть, после подсчета оказалось, что в точке A подвешено k_1 гирь, а в точках B и C – k_2 гирь. В этом случае точка O может рассматриваться как центр масс системы трех материальных точек (A ; k_1 (ед. массы)), (B ; k_2 (ед. массы)) и (C ; k_2 (ед. массы)). Так как M середина BC , то эту систему можно заменить системой двух точек: (A ; k_1 (ед. массы)) и (M ; $2k_2$ (ед. массы)) с центром масс в точке O . Применяя правило рычага (рисунок 1), для этой системы, приходим к выводу: $AO : OM = 2k_2 : k_1$.



$$F_1 D_1 = F_2 D_2$$

Рисунок 3

Задание 3 (max 15 баллов). Возьмите лист бумаги с неровными краями. На нем произвольно отметьте три точки A , B и C . Перегибанием листа бумаги найдите центр окружности, проходящей через эти три точки. Обоснуйте правильность построений.

Баллы	Критерии
5	Правильно решена задача сгибанием для случая, представленного на листе бумаги.
10	Способ решения задачи обобщенно описан.
15	Способ решения задачи теоретически обоснован.

Решение задания 3. *Построение:* Нужно перегнуть лист бумаги два раза. Первый раз перегнуть так, чтобы совместились точки A и B , второй – чтобы совместились точки B и C . Точка пересечения линий сгибов – центр окружности, проходящей через точки A , B и C (рис. 4). *Обоснование:* O – точка равноудаленная от каждой пары точек A и B ; B и C по определению окружности. Множество точек плоскости, равноудаленных от двух данных – серединный перпендикуляр к отрезку. Линии сгиба являются

серединными перпендикулярами к отрезкам АВ и ВС, поэтому точка О определяется как точка их пересечения.

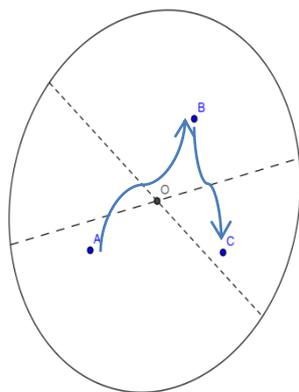


Рисунок 4

Задание 4 (max 20 баллов). Панель инструментов GeoGebra состоит только из 5 инструментов: «Точка», «Отрезок по двум точкам», «Луч по двум точкам», «Окружность по центру и точке» и «Пересечение двух объектов». Решите следующую последовательность задач на построение в GeoGebra:

1) Построить правильный треугольник данными инструментами. Использовать результат решения задачи, чтобы дополнить панель инструментов **своим** инструментом «Правильный треугольник». Сохранить файл под своей фамилией, например, Ivanov_4.1.ggb.

2) Убрать с панели инструментов инструмент «Окружность по центру и радиусу». С помощью оставшихся инструментов построить произвольный отрезок и разделить его пополам. Использовать результат решения задачи, чтобы дополнить панель инструментов **своим** инструментом «Середина отрезка». Сохранить файл под своей фамилией, например, Ivanov_4.2.ggb.

3) Убрать с панели инструментов инструмент «Правильный треугольник». С помощью оставшихся инструментов построить произвольную прямую, точку не лежащую на ней. Провести через эту точку, прямую, параллельную данной. Использовать результат решения задачи, чтобы дополнить панель инструментов **своим** инструментом «Параллельная прямая». Сохранить файл под своей фамилией, например, Ivanov_4.3.ggb.

4) С помощью набора инструментов, полученных в результате решения задачи 3, построить произвольный угол и точку, лежащую вне его. Построить угол равный данному, с вершиной в этой точке. Сохранить файл под своей фамилией, например, Ivanov_4.4.ggb.

5) С помощью набора инструментов, полученных в результате решения задачи 3, построить произвольный угол и провести его биссектрису. Сохранить файл под своей фамилией, например, Ivanov_4.5.ggb.

№ задания	Баллы	Критерии
1	3	Правильно построен равносторонний треугольник.
	5	Создан корректно работающий инструмент «Правильный треугольник»
2	8	Найден способ построения середины отрезка с помощью инструмента «Равносторонний треугольник»
	10	Создан корректно работающий инструмент «Середина отрезка»

3	13	Найден способ построения прямой, параллельной данной с помощью указанного набора инструментов.
	15	Создан корректно работающий инструмент «Параллельная прямая».
4	17	Правильно решены все предыдущие задачи. Угол, равный данному, создан с опорой на результаты решения предыдущих задач.
5	20	Правильно решены все предыдущие задачи. Найден способ построение биссектрисы угла с помощью заданного набора инструментов.

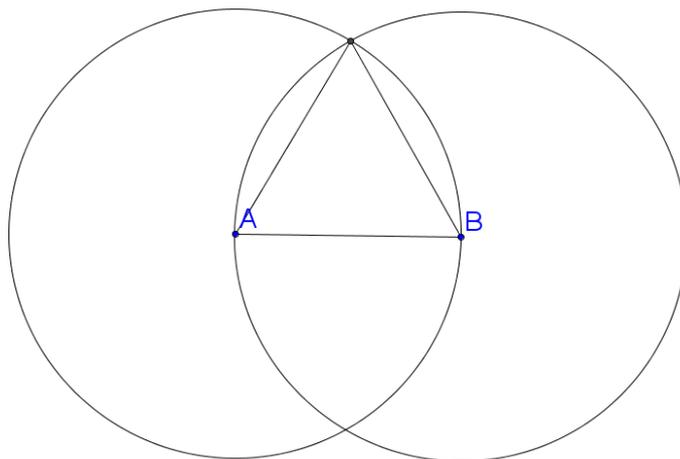
Решение задания 4.

1) Построить правильный треугольник данными инструментами. Использовать результат решения задачи, чтобы дополнить панель инструментов **своим** инструментом «Правильный треугольник».

Чтобы построить правильный треугольник, необходимо выполнить следующие шаги:

- а) Построить окружность с центром в точке А и радиусом АВ.
- б) Построить окружность с центром в точке В и радиусом АВ.
- с) Найти точку пересечения этих окружностей.
- д) Соединить эту точку с концами отрезка АВ.

Затем создать инструмент согласно выданной на Турнире инструкции.

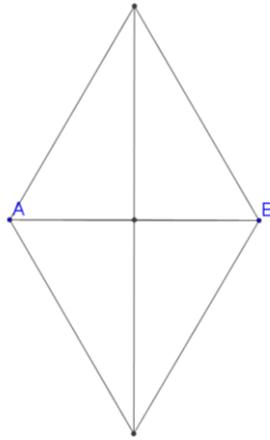


2) Убрать с панели инструментов инструмент «Окружность по центру и точке». С помощью оставшихся инструментов построить произвольный отрезок и разделить его пополам. Использовать результат решения задачи, чтобы дополнить панель инструментов **своим** инструментом «Середина отрезка».

Чтобы построить середину отрезка, необходимо выполнить следующие шаги:

- а) Построить два правильных треугольника на одной стороне АВ.
- б) Соединить противоположные вершины этих треугольников.

Затем создать инструмент согласно выданной на Турнире инструкции.

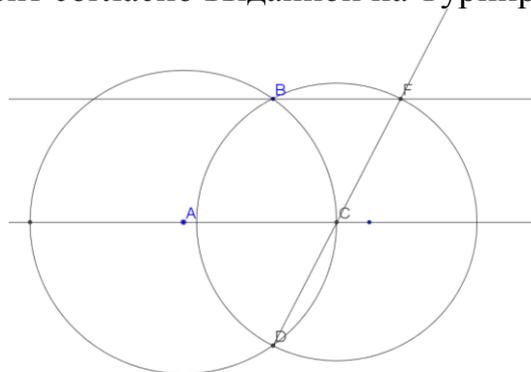


3) Убрать с панели инструментов инструмент «Правильный треугольник». Добавить инструмент «Окружность по центру и точке». С помощью оставшихся инструментов построить произвольную прямую и точку, не лежащую на ней. Провести через эту точку прямую, параллельную данной. Использовать результат решения задачи, чтобы дополнить панель инструментов **своим** инструментом «Параллельная прямая».

Чтобы построить прямую, параллельную данной через точку, не лежащую на этой прямой, необходимо выполнить следующие шаги:

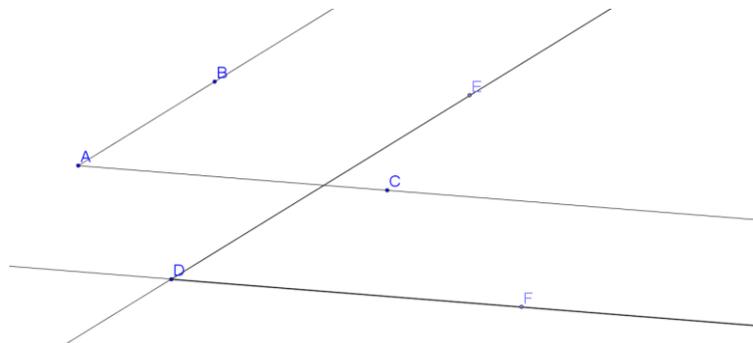
- а) Построить окружность с центром в точке A и радиусом AB.
- б) Найти точку пересечения окружности с прямой (точка C).
- в) Построить окружность с центром в точке C и радиусом CB.
- г) Найти точку пересечения этих окружностей (точка D).
- д) Провести луч DC.
- е) Найти точку пересечения луча с окружностью с центром в точке C (точка F).
- ж) Построить луч FB.
- з) Построить луч BF.

Затем создать инструмент согласно выданной на Турнире инструкции.



4) С помощью набора инструментов, полученных в результате решения задачи 3, построить произвольный угол и точку, лежащую вне его. Построить угол равный данному, с вершиной в этой точке.

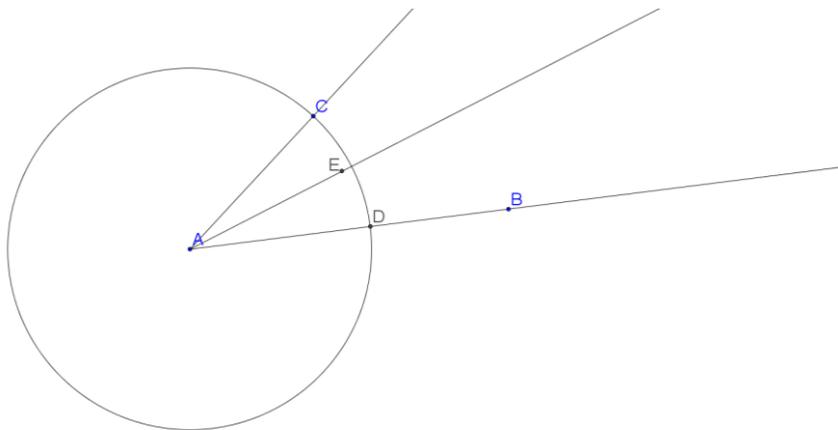
Чтобы построить угол, равный данному (угол BAC), с вершиной в точке (точка D), лежащей вне его, с помощью инструмента «Параллельная прямая», необходимо провести через эту точку прямые, параллельные сторонам угла, а затем отложить на них лучи DE и DF. Угол EDF равен углу BAC по теореме о соответственных углах.



5) С помощью набора инструментов, полученных в результате решения задачи 2, построить произвольный угол и провести его биссектрису.

Чтобы построить биссектрису угла с помощью инструмента «Середина отрезка», необходимо выполнить следующие шаги:

- а) Построить угол САВ.
- б) Построить окружность с центром в точке А и радиусом АС.
- в) Отметить точки пересечения окружности со сторонами угла (точки С и D).
- г) Найти середину отрезка CD (точка Е).
- д) Провести луч АЕ – искомую биссектрису угла САВ.



Задание 5 (max 30 баллов). (Задача предложена В.И. Рыжиком). В квадрат ABCD вписан треугольник AMN (точки M и N лежат на сторонах квадрата). В треугольнике AMN из вершины A проведена высота AH. Известно, что угол NAM равен 45° . Какую кривую опишет точка H, если перемещать точку N по периметру квадрата?

Решение задачи № 5. Эксперимент. Для точки H зададим функцию «оставлять след» и будем перемещать точку N по периметру квадрата. Пусть точка N лежит на стороне, противоположной вершине A. Точка H опишет дугу DB (рис. 3). Если же точка N лежит на стороне с концом A, то точка H опишет дугу DAB. *Гипотеза.* Основание перпендикуляра описывает фигуру, состоящую из двух дуг: дуги окружности с центром в точке A радиусом AD и дуги с центром O (центр квадрата) и радиусом OA.

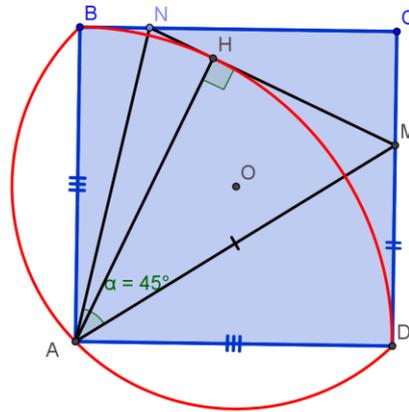


Рисунок 5

Случай 1. Точка N лежит на стороне, противолежащей вершине A.

Докажем, что основание перпендикуляра лежит на дуге BD окружности с центром в точке A. Пусть точка N лежит на стороне, противолежащей вершине A (например, BC). На прямой BC отложим отрезок $BE = MD$, как показано на рисунке 4. Прямоугольные треугольники ABE и ADF равны по двум катетам. Откуда следует, что $AE = AM$. Легко доказать, что треугольники AEN и AMN равны по двум сторонам и углу между ними. Так как в равных треугольниках соответственные элементы равны, то высоты AB и AN тоже равны. Таким образом, высота AN равна стороне квадрата, следовательно, лежит на дуге BD окружности с центром в точке A.

Докажем, что точка H, лежащая на дуге, является основанием высоты описываемого в задаче треугольника с углом 45° . Пусть точка H лежит на дуге BD окружности с центром в точке A (рис. 5). Построим треугольник, в котором AN является высотой, а вершины N и M лежат на сторонах BC и CD. Треугольники ABN и ANH равны по гипотенузе и катету. Аналогично равны и треугольники ANM и ADM. Из равенства треугольников следует равенство соответствующих углов. Рассмотрим углы при вершине A. В сумме они составляют 90° , следовательно, сумма углов NAH и MAH равна половине, то есть 45° .

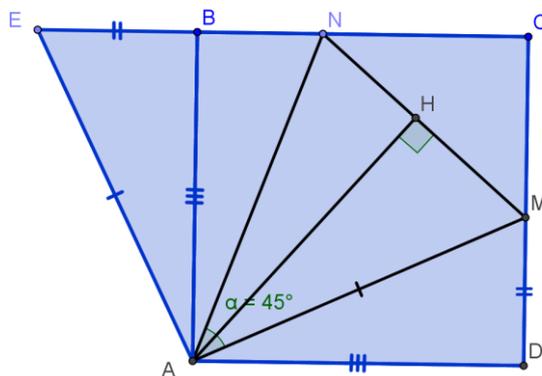


Рисунок 6

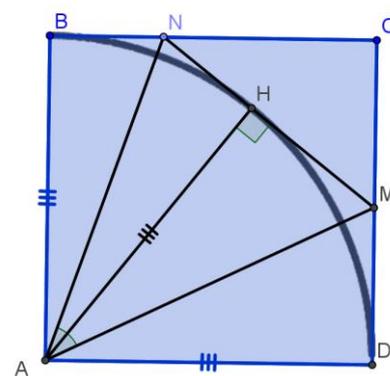


Рисунок 7

Случай 2. Точка N лежит на стороне с концом в точке A.

Докажем, что основание перпендикуляра лежит на дуге BAD окружности с центром в точке O. Пусть точка N лежит на стороне, содержащей вершину A (например, BA). Точка N в данном случае совпадает с вершиной C. Построим высоту AE треугольника AMN. Получившийся треугольник AME – прямоугольный, его вершина лежит на окружности с диаметром $AM=AC$ и центром O (рис. 6).

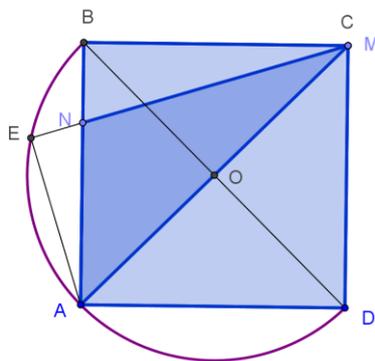


Рисунок 8

Докажем, что точка E , лежащая на дуге BAD , является основанием высоты описываемого в задаче треугольника с углом 45° . Пусть точка E лежит на дуге BAD окружности с центром в точке O . Соединим точку E с M и A . EM пересекает AB в точке N . Треугольник AMN является треугольником с углом 45° , а AE – его высота.

Задание 6 (по 10 баллов за каждую корректно поставленную задачу). Изменяя чертеж к задаче № 5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra с помощью инструмента ABC – «Надпись».

Некоторые из задач, которые могли бы быть составлены:

5.1 Изменится ли и как ответ в задаче 5, если угол NAM равен 30° ? 60° ?

5.2 В квадрат $ABCD$ вписан треугольник AMN (точки M и N лежат на сторонах квадрата). В треугольнике AMN из вершины A проведена медиана $АН$. Известно, что угол NAM равен 45° . Какую кривую опишет точка H , если перемещать точку N по периметру квадрата?