Девятнадцатый областной математический турнир «Перперикон» с международным участием, г. Кырджали, Болгария.

З А Д А Ч И   Д Л Я   9   К Л А С С А

Первые 5 задач оцениваются по 3 балла, задача 6 с открытым ответом оценивается 5 баллами, а задача 7 с подробным решением оценивается 10 баллами.

Время на работу 120 мин.

Задача 1. Одна из букв в слове ПЕРПЕРИКОН выбрана случайным образом. Какова вероятность того, что она среди тех, которые присутствуют в слове более одного раза?

A) 0,1 **B)** 0,2 **C)** 0,3 **D)** 0,4 **E)** 0,6

Задача 2. Из всех произведений пар натуральных чисел от 1 до 100 включительно одно произведение (пара) выбирается случайным образом. Какова вероятность, что оно делится на 3? (Множители в каждой паре разные.)

A) $\frac{73}{200}$ **B)** $\frac{87}{175}$ **C)** $\frac{83}{150}$ **D)** $\frac{91}{100}$ **E)** $\frac{49}{50}$

Задача 3. Пусть x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2-7x+4=0$. Найдите $|x_1-x_2|$.

A) $\sqrt{33}$ **B)** $\sqrt{32}$ **C)** $\sqrt{31}$ **D)** $\sqrt{30}$ **E)** $\sqrt{29}$

Задача 4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, $BC=AD=6$ см. Известно, что $\angle AEB=60^0$, где E точка пересечения продолжений сторон AD и BC. Найдите расстояние между серединами диагоналей четырехугольника $ABCD$.

A) 7 см **B)** 6 см **C)** 5 см **D)** 4 см **E)** 3 см

Задача 5. В одной школе среди девятиклассников 9 отличников, в десятых классах − 4, а в одиннадцатых классах – 7 отличников. На собрание школьников города эта школа должна отправить 10 своих отличников, среди которых два девятиклассника, три ученика десятого класса и пять из одиннадцатого. Сколько существует способов выбрать группу из 10 учеников для представления школы на собрании?

A) 3024 **B)** 2646 **C)** 1062 **D)** 126 **E)** 81

Задача 6. В парке находятся 2 аллей, на которых растут m и n деревьев соответственно. Средняя высота деревьев первой аллеи 205 см, а на второй − 196 см. Найдите отношение $m:n$, если средняя высота всех деревьев в парке 200 см.

Задача 7. Каждое из уравнений $ax^2+3bx+3c=0$ и $3(a+b)x^2+3(c-b)x+a-3c=0$, где a, b и c различные положительные числа, имеет два различных (действительных) корня. Сумма всех четырех корней двух уравнений равна их произведению. Докажите, что наименьший корень второго уравнения равен -1.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Задача	1	2	3	4	5
Ответ	E	C	A	E	A

Задача 6. 0,8.

Задача 7. Пусть x_1 и x_2 корни первого уравнения, а x_3 и x_4 корни второго. Применяя теорему Виета, получим:
$-\frac{3b}{a}-\frac{c-b}{a+b}=x_1+x_2+x_3+x_4=x_1x_2x_3x_4=\frac{3c}{a}\cdot\frac{a-3c}{3(a+b)}$, т.е. $-\frac{3b}{a}-\frac{c-b}{a+b}=\frac{3c}{a}\cdot\frac{a-3c}{3(a+b)}$, откуда $-3ab-3b^2-ac+ab=ac-3c^2$. Следовательно, $-2ab-2ac+3c^2-3b^2=0$ и $(b+c)(3(c-b)-2a)=0$. Так как $b+c\neq 0$ (числа b и c положителные по условию), то $(3(c-b)-2a)=0$, т.е. $3(c-b)=2a$. Подставим $x=-1$ во второе уравнение. Получим $3(a+b)-3(c-b)+a-3c=0$, откуда $4a-6(c-b)=0$, т.е. $2a-3(c-b)=0$, что справедливо из доказанного выше. Таким образом, $x=-1$ корень второго уравнения. Применяя теорему Виета, зная произведение двух корней, найдем второй корень этого уравнения. Он равен $\frac{a-3c}{3(a+b)}:(-1)=\frac{3c-a}{3(a+b)}$. Условие $\frac{3c-a}{3(a+b)}>-1$ эквивалентно $3c-a>-3a-3b$, т.е. $2a>-3(b+c)$. Последнее неравенство выполнено, поскольку числа a, b и c положительны. Этим мы доказали, что $x=-1$ наименьший корень второго уравнения.

Критерии оценивания: Правильное выражение суммы и произведения четырех корней по формулам Виета оценивается 2 баллами. Получена зависимость $3(c-b)=2a$ еще 3 балла. Доказательство, что $x=-1$ корень второго уравнения - 2 балла, а за доказательство, что корень $x=-1$ наименьший корень второго уравнения, дополнительно 3 балла.