Девятнадцатый областной математический турнир «Перперикон» с международным участием, г. Кырджали, Болгария.

ЗАДАЧИ ДЛЯ 11 КЛАССА

Первые 5 задач оцениваются по 3 балла, задача 6 с открытым ответом оценивается 5 баллами, а задача 7 с подробным решением оценивается 10 баллами.

Время на работу 120 мин.

Задача 1. В одиннадцатых классах одной школы число девочек равно числу мальчиков. За контрольную по математике 10% всех учащихся получили двойки, 30% - тройки, 25% - четверки, 20% - пятерки, а остальные - шестерки. (***В Болгарии используется шестибалльная система оценивания. При этом отличниками считаются те, кто получили отметку 6.***) Мальчики получили 50% двоек, 25% троек, 80% четверок и $\frac{1}{3}$ пятерок. Найдите отношение числа мальчиков с отличными оценками к числу девушек с отличными оценками.

A) 7:13 **B)** 13:7 **C)** 13:5 **D)** 5:13 **E)** 8:5

Задача 2. Дана геометрическая прогресия с первым членом -2 и знаменатетелем -2. Из множества $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ найдите те значения n, для которых сумма S_n первых n членов этой прогрессии положительна. Найдите сумму всех таких чисел S_n, что $S_n > 0$.

A) $\frac{2}{9}\left[4^{1010}-3031\right]$ **B)** $4^{2018}-2306$ **C)** $\frac{2}{3}\left[2^{1010}-2341\right]$ **D)** $4^{1010}-1789$ **E)** $2^{1010}-4043$

Задача 3. Дана арифметическая проогрессия с первым членом $a_1 = 2$ и разностью 3, содержащая $5n$ членов. Другая арифметическая прогрессия с первым членом $b_1 = 3$ и разностью 2 имеет $3m$ членов. Известно, что $a_{3n} = b_{2m}$, и количество членов первой прогрессии минимально. Найдите сколько всего членов в двух прогрессиях:

A) 22 **B)** 24 C) 26 **D)** 28 **E)** 30

Задача 4. Сумма трех различных натуральных чисел равна 6049. Уберем наименьшее из данных чисел. Найдите наименьшее значение суммы двух оставшихся чисел.

A) 4030 **B)** 4031 **C)** 4032 **D)** 4033 **E)** 4034

Задача 5. Радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды с боковым ребром $4\sqrt{5}$, равен 5. Найдите длину высоты, проведенной к основанию.

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** $5\sqrt{2}$ **E)** 10

Задача 6. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2 - 4y^2 + 3xy = 0 \end{cases}$$

Задача 7. Найдите количество всех пятизначных чисел с разными цифрами, для которых произведение двух цифр равно произведению трех других цифр?

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Задача	1	2	3	4	5
Ответ	C	A	A	E	C

Задача 6. 4 решения.

Задача 7. Ответ: 480. Заметим, что цифры 0, 5 и 7 не могут участвовать в записи чисел. (1 балл)

Если цифра 9 присутствует в записи в одной из групп, то в другой группе должны быть 3 и 6. В группе с числом 9 должно быть 2 или 4. Отсюда мы получаем две возможности для пятизначных чисел: образованы цифрами 1, 2, 3, 6 и 9 или цифрами 2, 3, 4, 6 и 9. Обе группы цифр удовлетворяют условию, так как $3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$ и $6 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 4$. Количество пятизначных чисел в этом случае равно $2 \cdot 5! = 240$. (3 балла)

Если цифра 8 присутствует в записи и находится в одной из групп, то в другой должны быть 2 и 4 или 4 и 6. Случай 2 и 4 в одной группе не может быть реализован. Остается случай, когда 4 и 6 находятся в одной группе. Это дает возможность для образования пятизначных чисел цифрами 1, 3, 4, 6 и 8. Реализация возможна, потому что $6 \cdot 4 = 8 \cdot 3$. Количество пятизначных чисел в этом случае равно $5! = 120$. (3 балла)

Если цифры 8 и 9 не участвуют в записи, то остаются 1, 2, 3, 4 и 6. Искомое пятизначное число можно построить, так как $4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$. Количество пятизначных чисел в этом случае равно $5! = 120$. (3 балла)

Итого получим 240+120+120480 чисел, удовлетворяющих условию задачи.