З А Д А Ч И Д Л Я 10 К Л А С С А

Первые 5 задач оцениваются по 3 балла, задача 6 с открытым ответом оценивается 5 баллами, а задача 7 с подробным решением оценивается 10 баллами.

Время на работу 120 мин.

Задача 1. Найдите количество решений неравенства в действительных (вещественных) числах $\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\le\sqrt{2}$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** больше 3

Задача 2. Найдите количество целочисленных решений неравенства $x^2-(a-3)x-3a<0$, если a - наименьшее натуральное число, которое удовлетворяет неравенству $a^2+a-2\ge 0$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** больше 3

Задача 3. Внутри квадрата *ABCD* дана точка *E* такая, что *BE* = 3 см, *AE* = 4 см и $\angle AEB=90^0$. Прямая *BE* пересекает сторону квадрата *CD* в точке *F*. Найдите длину отрезка *FC*.

A) 3 см **B)** 3,75 см **C)** 4 см **D)** 4,25 см **E)** 5 см

Задача 4. Найдите число действительных корней уравнения $x^2+x-3=|x|$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** больше 3

Задача 5. Найдите количество целочисленных корней уравнения

$$\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=1,$$

которые больше 8.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** больше 3

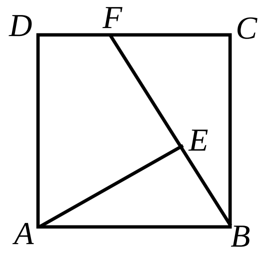
Задача 6. Сколько точек можно разместить внутри и на границе квадрата со стороной 36 см, чтобы расстояние между любыми двумя точками было больше 17 см?

Задача 7. Дана окружность *k* с центром в точке *O* и радиусом 4 см. На прямой *l*, не имеющей общих точек с *k*, взяли точку *M* такую, что $OM\perp l$ и $OM=12$ см. Точка $N\in l$ и $N\ne M$, а *NA* и *NB* ($A,\ B\in k$) являются касательными к окружности *k*. Найдите длину отрезка *OK*, если *K* точка пересечения хорды *AB* и отрезка *OM*.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ДЛЯ 10 КЛАССА

1. Ответ. B). Подкоренные выражения должны быть неотрицательны, т.е. $x\ge 0$ и $x+2\ge 0$, откуда следует, что область определения неравенства $x\ge 0$. Но тогда $x+2\ge 2$ и $\sqrt{x+2}\ge\sqrt{2}$. Таким образом, при $x=0$ неравенство обращается в равенство, т.е. $x=0$ решение . При $x>0$ значение левой части больше, чем значение правой, т.е. неравенство не имеет положительных решений.

2. Ответ D). Так как $a^2+a-2=(a+2)(a-1)$, решением неравенства $a^2+a-2\geq 0$ является мнжество $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$, а наименьшее натуральное число, которое ему принадлежит, равно 1. С другой стороны $x^2-(a-3)x-3a=(x+3)(x-a)$ и решением неравенства $x^2-(a-3)x-3a<0$ при $a=1$ является интервал $(-3;1)$. Целые числа в этом интервале: $-2,\,-1,\,0$. Их число равно 3.



3. Ответ B). Треугольник ABE египетский и следователно AB = 5см. Так как $\angle ABE=\angle BFC$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами), треугольники ABE и BFC подобны. Тогда $\dfrac{FC}{BE}=\dfrac{BC}{AE}$, т.е. $\dfrac{FC}{3}=\dfrac{5}{4}$. Откуда $4FC=15$ и, следовательно, $FC=\dfrac{15}{4}=3,75$ см.

4. Ответ C). *<u>Первый случай</u>*. $x\geq 0$. Уравнение имеет вид $x^2+x-3=x$, откуда $x^2-3=0$ и $x=\pm\sqrt{3}$. Только $x=\sqrt{3}$ попадает в рассматриваемый интервал.

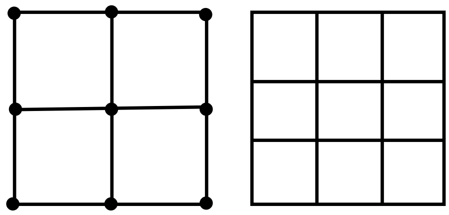
<u>Второй случай</u>. $x<0$ и уравнение принимает вид $x^2+x-3=-x$, т.е. $x^2+2x-3=0$. Значит, $x=-1\pm\sqrt{4}=-1\pm 2$, т.е $x=1$ и $x=-3$. Только $x=-3$ удовлетворяет рассматриваемому случаю.

Окончательно имеем, что уравнение имеет 2 действительных корня: $x=\sqrt{3}$ и $x=-3$.

5. Ответ D). Положим $\sqrt{x-2}=y\geq 0$. Тогда $x=y^2+2$ и уравнение примет вид:

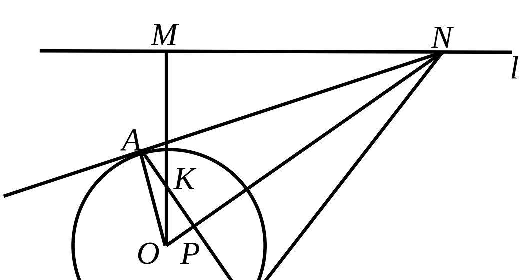
$$\sqrt{y^2+4-4y}+\sqrt{y^2+9-6y}=1,$$

т.е. $\sqrt{(y-2)^2}+\sqrt{(y-3)^2}=1$. Сведем полученное уравнение к уравнению с модулям $|y-2|+|y-3|=1$. При $y<2$ имеем $-y+2-y+3=1$, откуда $y=2$, не удовлетворяет условию. При $2\leq y\leq 3$ имеем $y-2-y+3=1$, получим $1=1$ и, следовательно, все значения y из интервала $2\leq y\leq 3$ являются решениями. При $y>3$ имаме $y-2+y-3=1$, откуда $y=3$, не удовлетворяет условию. Таким образом, $2\leq\sqrt{x-2}\leq 3$, т.е. $4\leq x-2\leq 9$ и все целочисленные решения: $x=6$, $x=7$, $x=8$, $x=9$, $x=10$ и $x=11$. Только три из них больше 8.



6. Ответ 9. Разделим данный квадрат на 4 квадрата со стороной 18 см и расположим 9 точек – по одной в вершинах, как показано на рисунке. Расстояние между любыми двумя не меньше 18 см и следовательно больше 17 см. Число 9 является наибольшим.

Предположим, что количество точек, удовлетворяющих условию задачи больше 9. Тогда не менее двух из них попадут в один квадрат со строной 12 см (второй рисунок справа). Но расстояние между двумя такими точками не превосходит диагонали квадрата 12×12, длина которой $\sqrt{12^2+12^2}=\sqrt{288}<\sqrt{289}=17$ см и следовательно это расстояние меньше 17 см.



7. Ответ. $\dfrac{4}{3}$ см. Пусть P точка пересечения ON и AB. Воспользуемся тем, что $ON\perp AB$. Из подобия треугольников ΔOPK и ΔOMN имеем $\frac{OP}{OK}=\frac{OM}{ON}$, т.е. $OP\cdot ON=OK\cdot OM$, а из подобия ΔAOP и ΔNOA имеем $\frac{AO}{OP}=\frac{ON}{AO}$, т.е. $OP\cdot ON=AO^2$. Таким образом, $OK\cdot OM=AO^2$, откуда $OK=\frac{AO^2}{OM}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$ cm.

Критерии оценки выполнения задания: Доказательство каждого из двух подобий $\Delta OPK \sim \Delta OMN$ и $\Delta AOP \sim \Delta NOA$ оценивается по 3 балла, а 4 бала добавляется за полное решение. Можно оценить 1 баллом частичные результаты, например, доказательство факта, что $ON\perp AB$.