РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GEOGEBRA

Безумова Ольга Леонидовна,
Рабинович Тая Сергеевна

Функциональная линия школьного курса математики

Основа содержания линии – **элементарные функции**:

- C (где $C \in R$), x, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\arcsin x$, которые рассматриваются во всей области, где они имеют значение;
- функции вида $f+g$, $f \cdot g$ и $f \circ g$, где f и g – элементарные функции [1].

[1] *Виленкин Н.Я., Дуничев К.И, Столяр А.А.* Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1980.

Способы изучения функций в школьном курсе алгебры

- Целыми классами (например, линейная: $y = kx$, $y = kx + b$),
- как индивидуально заданные, а затем подвергаются обобщению (например, квадратичная: $y = x^2 \to y = ax^2 \to y = ax^2 + bx + c$).

«Под классом функции понимают функции, описываемые обобщенным уравнением $y = f(a, b, c, \dots n, x)$, где *x* – независимая переменная, *y* – зависимая переменная, $a, b, c, \dots n$ – параметры»[2].

[2] Элективные математические курсы: Учебное пособие / М.В. Шабанова, О.Л. Безумова, С.Н. Котова, Е.З. Минькина, И.Н. Попов. – Архангельск: Поморский университет, 2005.

Основная цель изучения классов функции

Исследование характера изменения их свойств под влиянием изменения значении параметров. Например:

- изучение изменения расположения графика линейной функции в системе координат под влиянием изменений свободного члена и углового коэффициента,
- взаимного расположения графиков двух линейных функций (7 класс).

Метод численного эксперимента

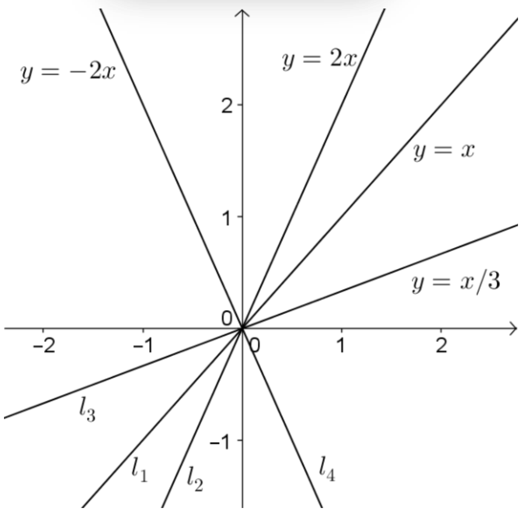


Рис. 1

На рисунке 1 изображены «графики линейных функций y=x (прямая l_1), y=$2x$ (прямая l_2), $y=\frac{x}{3}$ (прямая l_3), $y=-2x$ (прямая l_4).

Обратите внимание: от коэффициента пропорциональности зависит угол, который построенная прямая образует с положительным направлением оси *x*. Если $k>0$, то этот угол *острый*…; если $k<0$, то этот угол *тупой*… Далее, если $k>0$, то чем больше k, тем больше угол. Так … для прямой l_3 имеем $k=\frac{1}{3}$, для прямой l_1 имеем $k=1$, для прямой l_2 имеем $k=2$; при увеличении коэффициента k увеличивается и угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс» [3].

[3] *Мордкович А.Г.* Алгебра. 7 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2001.

Проблема

- Выводы, сделанные с опорой на статический чертеж, не являются убедительными, так как взаимовлияние (зависимость) свойств остается скрытой для учащихся.
- В представленном фрагменте текста исследование влияния изменения величины коэффициента k на угол наклона прямой является неполным, так как не рассмотрен случай $k < 0$. Ограниченность вывода определена недостаточностью представленных на рисунке данных для демонстрации зависимости (рассмотрен лишь случай $k = -2$).

Решение проблемы

- Получение подобных выводов лучше осуществлять с использованием динамических чертежей, созданных в интерактивных геометрических средах, в частности GeoGebra.

Особенности построения динамического чертежа

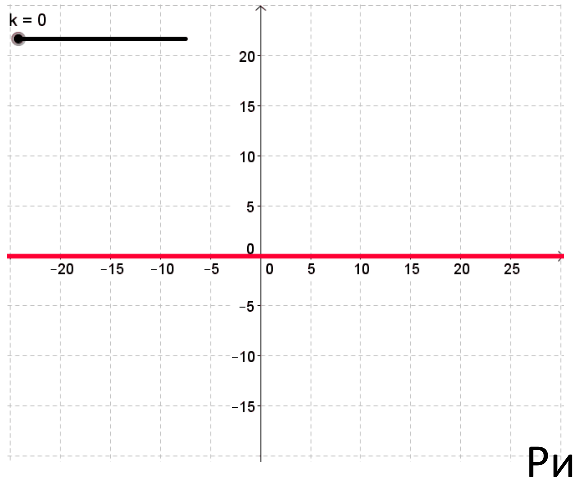


Рис. 2

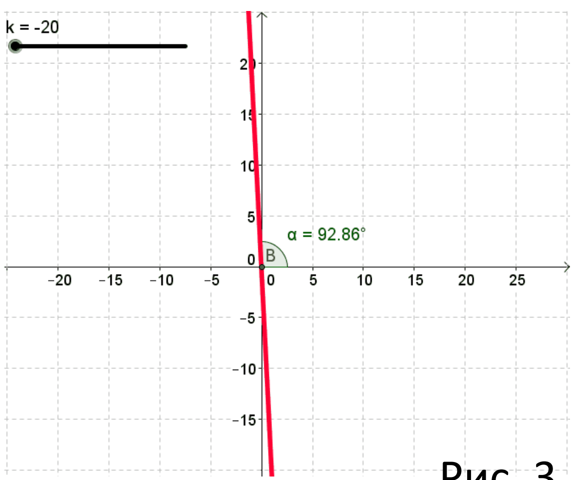


Рис. 3

- Зададим параметр *k* с помощью инструмента «*Ползунок*», изменяющийся на $[-50; 50]$ с шагом 0,1.
- Построим график функции $y = kx$, записав уравнение в строке ввода.
- С помощью инструмента «*Угол*» зададим измерение угла наклона прямой к положительной полуоси О*x*.
- При перемещении движка ползунка от меньшего значения к большему наблюдаем динамику изменения величины угла наклона прямой к положительной полуоси О*x* (рис. 2, 3).

Особенности использования динамического чертежа

- Эти наблюдения позволяют сделать вывод, что при $k < 0$ угол тупой и при изменении k от наименьшего значения до 0 изменяется в интервале от $90°$ до $180°$; при $k > 0$ угол острый и при изменении k от 0 до наибольшего значения изменяется в интервале от $0°$ до $90°$; при $k = 0$ угол наклона $0°$.

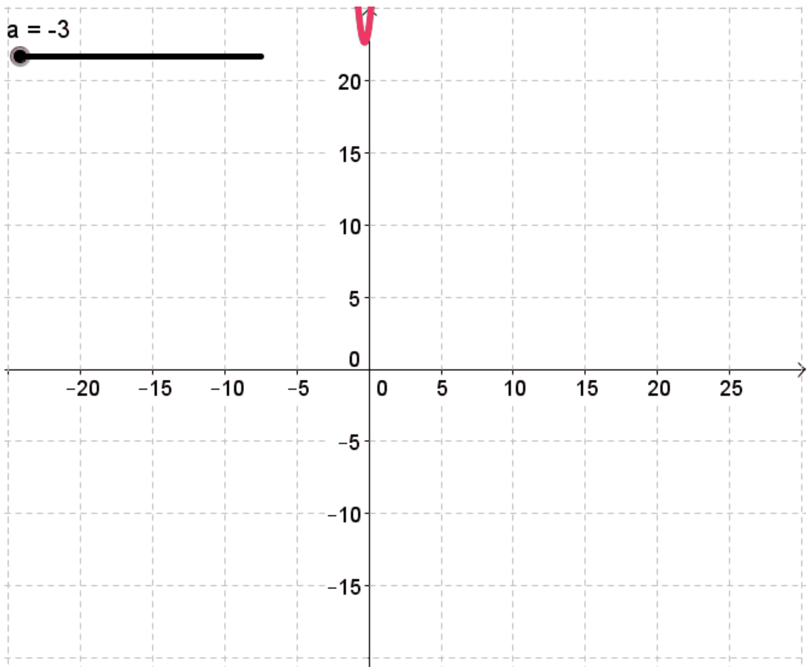
Вывод

- Привлечение ИГС к изучению свойств классов элементарных функций существенно расширяет круг задач, которые могут быть поставлены и решены учащимися из наглядных соображений.
- Строка ввода обеспечивает возможность построения графиков любых элементарных функций с любым количеством параметров. При этом от учащихся не требуется никаких дополнительных знаний и умений.
- Если данные задачи ставятся с целью формирования умений описывать по графику поведение и свойства функции, то решение их может быть ограничено компьютерным экспериментом.

Пример 1

Исследовать на четность и нечетность функции, входящие в класс с общим уравнением

$$y = (a^2 - a)x^2 + (a^2 - 1)x + (a - 1)2a.$$



Решение (методом компьютерного эксперимента):

- Введем параметр *a* с помощью инструмента «*Ползунок*».
- Построим график данной функции с помощью строки ввода. График функции отобразится в рабочем поле программы.

Пример 1

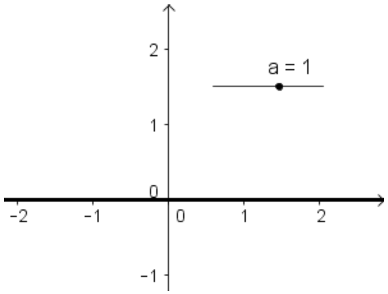


Рис. 5

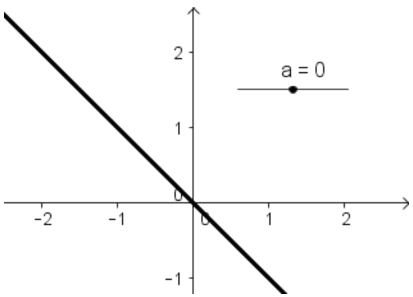


Рис. 4

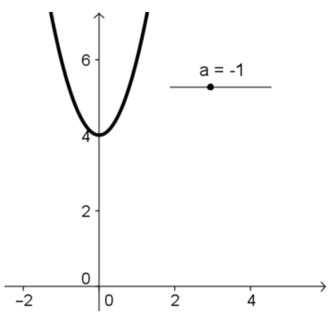


Рис. 6

- При перемещении движка ползунка от меньшего значения к большему выделяем значения параметра, при которых график функции имеет ось $y = 0$ или центр симметрии точку (0; 0).
- Такими значениями будут
  1) $a = 1$, функция четная и нечетная одновременно (рисунок 4).
  2) $a = 0$, функция нечетная (рисунок 5).
  3) $a = -1$, функция четная (рисунок 6).
- Во всех остальных случаях функция не является ни четной, ни нечетной.

Аналитическое решение

- При $a = 1 \ \ y = 0$, следовательно, функция четная и нечетная.

- При $a = 0 \ \ y = -x$, следовательно, функция нечетная.

- При $a = -1 \ \ y = 2x^2 + 4$, следовательно, функция четная.

Аналитическое решение

- При $a \neq \pm 1, a \neq 0$
- Функция четна, если при любых x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, то есть $(a^2 - a)x^2 - (a^2 - 1)x + (a - 1)2a = (a^2 - a)x^2 + (a^2 - 1)x + (a - 1)2a$, откуда следует, что равенство справедливо только при $x = 0$.
- Функция нечетна, если при любых x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, то есть $(a^2 - a)x^2 - (a^2 - 1)x + (a - 1)2a = -(a^2 - a)x^2 - (a^2 - 1)x - (a - 1)2a$, откуда следует, что равенство справедливо только при $x = \pm\sqrt{2}$.
- Следовательно, функция не является ни четной, ни нечетной.

Задачи на выделение функций, обладающих интересующими свойствами

Такие задачи могут быть использованы

- для обоснования причин конкретизации изучаемых функций в логике развития содержания курса (например, $y = kx + b \ \to y = kx$),
- для объяснения причин ограничений, наложенных на значения параметров (например, почему в определении квадратичной функции $a \neq 0$),
- в качестве пропедевтического средства развития знаний о классах функций, заданных набором свойств.

Пример 2

Найдите значения параметра a, при каждом из которых функция $y = -5 + 5a + sin^2x + a(3 - cosx)^2$ принимает на всей области определения положительные значения.

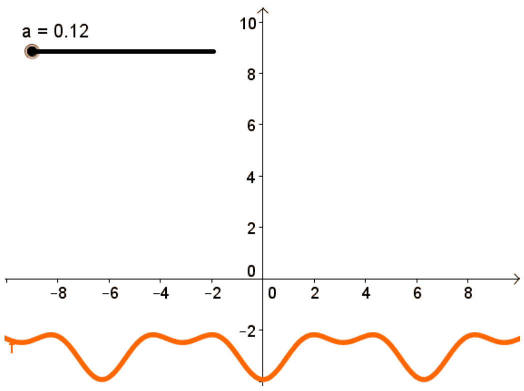


Рис. 7

- Решение (методом компьютерного эксперимента):
- Введем параметр *a* с помощью инструмента «*Ползунок*».
- Построим график данной функции (рисунок 7).
- При перемещении движка ползунка от наименьшего значения к наибольшему наблюдаем за изменением промежутков знакопостоянства функции по ее графику.

Результат

- Проведенный эксперимент позволяет прийти к выводу, что знакоположительными являются функции задаваемые параметром, который принимает значение $a \approx 0{,}56$ и большие. Увеличивая точность отображения значений параметра, получаем последовательность приближенных значений 0,56; 0,556; 0,5556 … Это наводит на мысль, что мы имеем дело с бесконечной периодической дробью 0,(5). Далее, используя алгоритм перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную, получим $a = \frac{5}{9}$. Тогда можем сделать вывод: функция знакоположительна при $a \epsilon (\frac{5}{9}; +\infty)$.

Аналитическое решение

- Сформулируем данную задачу на языке неравенств:

Найти все значения параметра *a* при которых неравенство $-5+5a+sin^2x+a(3-cosx)^2>0$ справедливо для любого *x*.

- Заменим данное неравенство ему равносильным: $(a-1)cos^2x-6a\cdot cosx+14a-4>0$
- Выполним замену переменной: $cosx=t$ где $t\epsilon[-1;1]$. Теперь наша задача звучит так:

Найти все значения параметра *a*, при которых неравенство $(a-1)t^2-6at+14a-4>0$ справедливо для любого $t\in[-1;1]$.

Аналитическое решение

- Решение данной задачи может быть осуществлено с опорой на свойства квадратичной функции (рисунки 8-11), за исключением случая $a = 1$, который должен быть рассмотрен отдельно. Таким образом, выделяется 5 случаев.

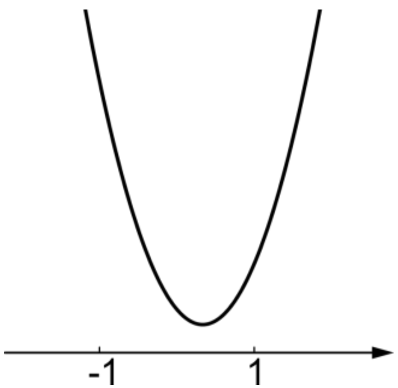


Рис. 8

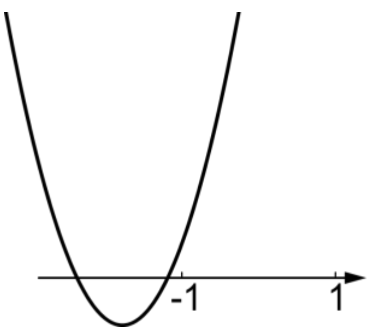


Рис. 9

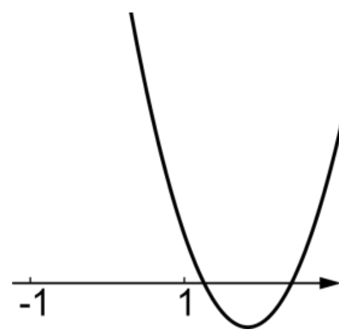


Рис. 10

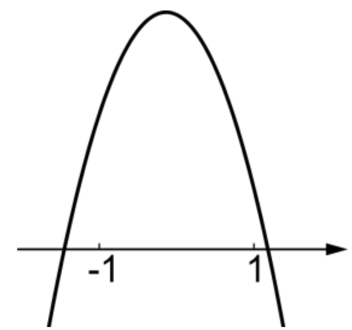


Рис. 11

Аналитическое решение

Найти все значения параметра *a*, при которых неравенство $(a-1)t^2-6at+14a-4>0$ справедливо для любого $t\in[-1;1]$.

- *Случай 1.* Проверим, является ли функция знакоположительной при $a=1$.
- Получаем неравенство $-6t+10>0$, значит $t<\frac{5}{3}$. Учитывая, что ограничения на t ($t\epsilon[-1;1]$) получаем, что при $a=1$, значит *f(x)* действительно принимает положительные значения при любом *x.*

Аналитическое решение

Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-1)t^2-6at+14a-4>0$ справедливо для любого $t\in[-1;1]$.

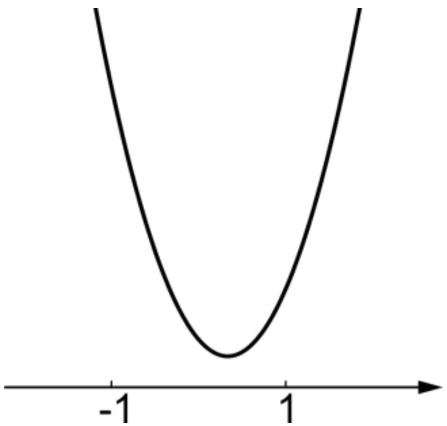


Рис. 8

- *Случай 2.* Найдем значения *a* из условия $\begin{cases} a>1 \\ D<0 \end{cases}.$

Для данной функции получаем $\begin{cases} a>1 \\ \left[\begin{array}{l} a>\frac{9+\sqrt{61}}{5} \\ a<\frac{9-\sqrt{61}}{5} \end{array}\right. \end{cases}$,

тогда $a\in\left(\frac{9+\sqrt{61}}{5};\ +\infty\right)$.

Аналитическое решение

Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-1)t^2-6at+14a-4>0$ справедливо для любого $t \in [-1;1]$.

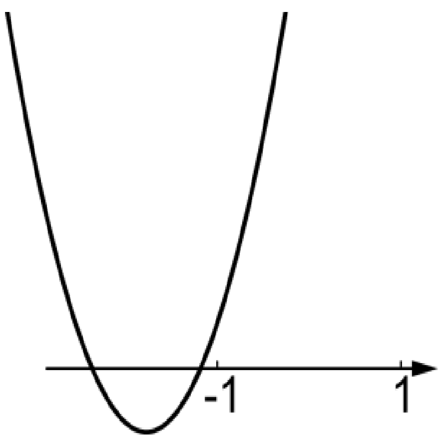


Рис. 9

- *Случай 3.* Найдем значения *a* из условия

$$\begin{cases} a>1 \\ D\ge 0 \\ f(1)>0 \\ x_{в}>1 \end{cases}. \text{ Получаем } \begin{cases} a>1 \\ \frac{9-\sqrt{61}}{5}\le a\le \frac{9+\sqrt{61}}{5} \\ a>\frac{5}{9} \\ \left[\begin{array}{l} a>1 \\ a<-\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases},$$

тогда $a \in \left(1; \frac{9+\sqrt{61}}{5}\right]$.

Аналитическое решение

Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-1)t^2-6at+14a-4>0$ справедливо для любого $t\in[-1;1]$.

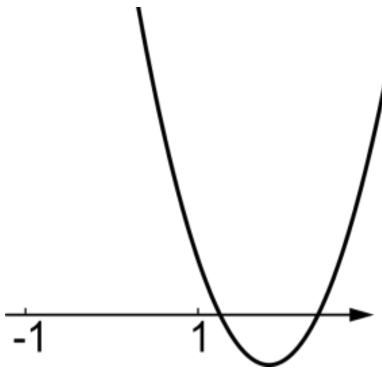


Рис. 10

- *Случай 4.* Найдем значения *a* из условия $\begin{cases} a>1 \\ D\geq 0 \\ f(-1)>0 \\ x_{\text{в}}<-1 \end{cases}$. Получаем $\begin{cases} a>1 \\ \frac{9-\sqrt{61}}{5}\leq a\leq \frac{9+\sqrt{61}}{5} \\ a>\frac{5}{21} \\ \frac{1}{4}<a<1 \end{cases}$, тогда решений нет.

Аналитическое решение

Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-1)t^2 - 6at + 14a - 4 > 0$ справедливо для любого $t \in [-1; 1]$.

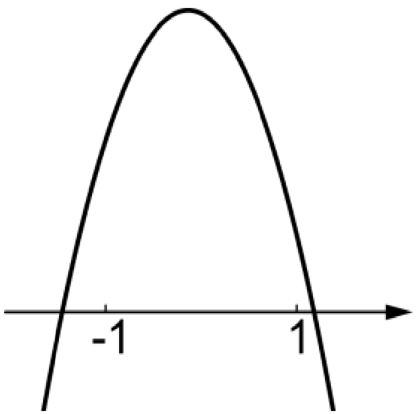


Рис. 11

- *Случай 5.* Найдем значения *a* из условия $\begin{cases} a < 1 \\ D > 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$. Получаем $\begin{cases} a < 1 \\ \frac{9-\sqrt{61}}{5} < a < \frac{9+\sqrt{61}}{5} \\ a > \frac{5}{21} \\ a > \frac{5}{9} \end{cases}$,

  тогда $a \in \left(\frac{5}{9};\ 1\right)$.

- Объединяя результаты, получим, что условию задачи удовлетворяют все функции данного класса, задаваемые значением параметра $a \in \left(\frac{5}{9}; +\infty\right)$.

Вывод

Представленные примеры показывают, что включение учащихся в деятельность по решению подобных задач формирует у них умения, связанные с графическим и аналитическим решением задач с параметрами двух видов:

- задачи на нахождение параметра при которых функции, входящие в класс обладают указанным свойством (на выделение подкласса функций);
- задачи на исследование характера изменчивости интересующего свойства под влиянием изменения параметра (на классификацию функций, входящих в класс).

Библиографический список

- *Виленкин Н.Я., Дуничев К.И, Столяр А.А.* Современные основы школьного курса математики: Пособие для студентов пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1980.
- Элективные математические курсы: Учебное пособие/ М.В. Шабанова, О.Л. Безумова, С.Н. Котова, Е.З. Минькина, И.Н. Попов. – Архангельск: Поморский университет, 2005.
- *Мордкович А.Г.* Алгебра. 7 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2001.
- Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: Учебно-методическое пособие / О.Л. Безумова, Р.П. Овчинникова, О.Н. Троицкая и др. – Архангельск: КИРА, 2011.