В настоящее время на преподавании геометрии болезненно сказывается …бремя традиций

Ф.Клейн, 1934 г.

Выход в пространство с ИГС

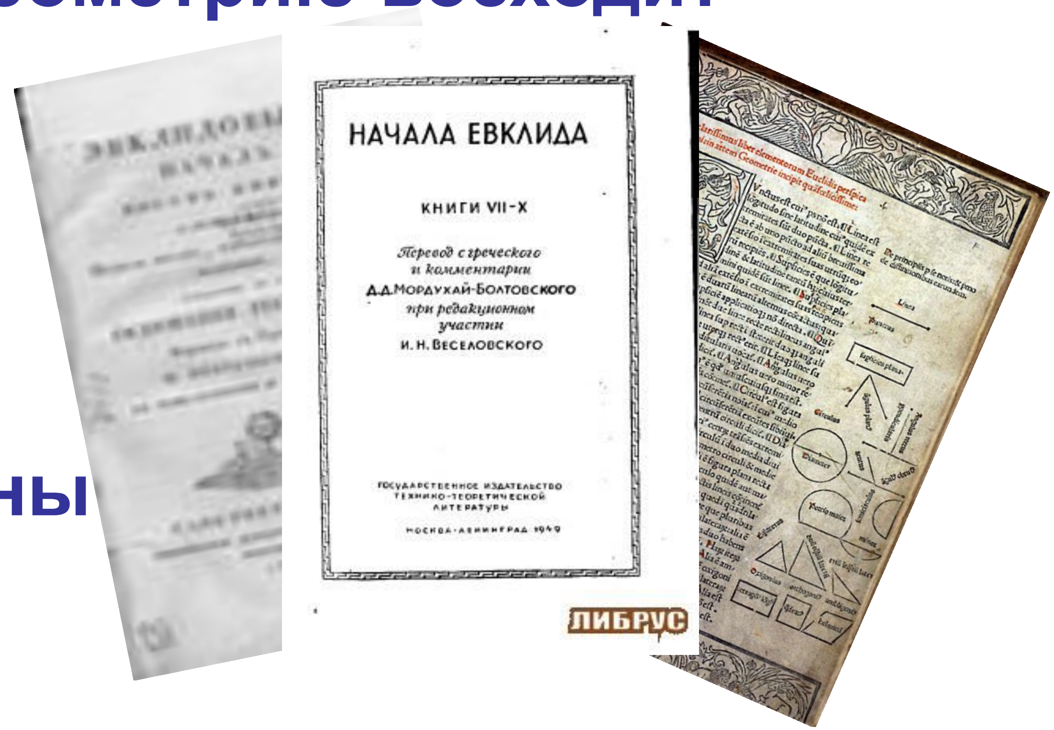
изучение стереометрии на основе виртуального трехмерного моделирования

© Шабанова Мария Валерьевна, САФУ, Россия

ШКГ = планиметрия + стереометрия

Традиция разделения ШКГ в России на планиметрию и стереометрию восходит

к «Началам» Евклида



Книги I-VI посвящены планиметрии

Книги XI-XIII посвящены стереометрии

(использовались в качестве учебника геометрии в школе «*Математических и навигацких, т.е. мореходно-хитростных наук*» с 1701 г.)

Достоинства и недостатки деления ШКГ на планиметрию и стереометрию

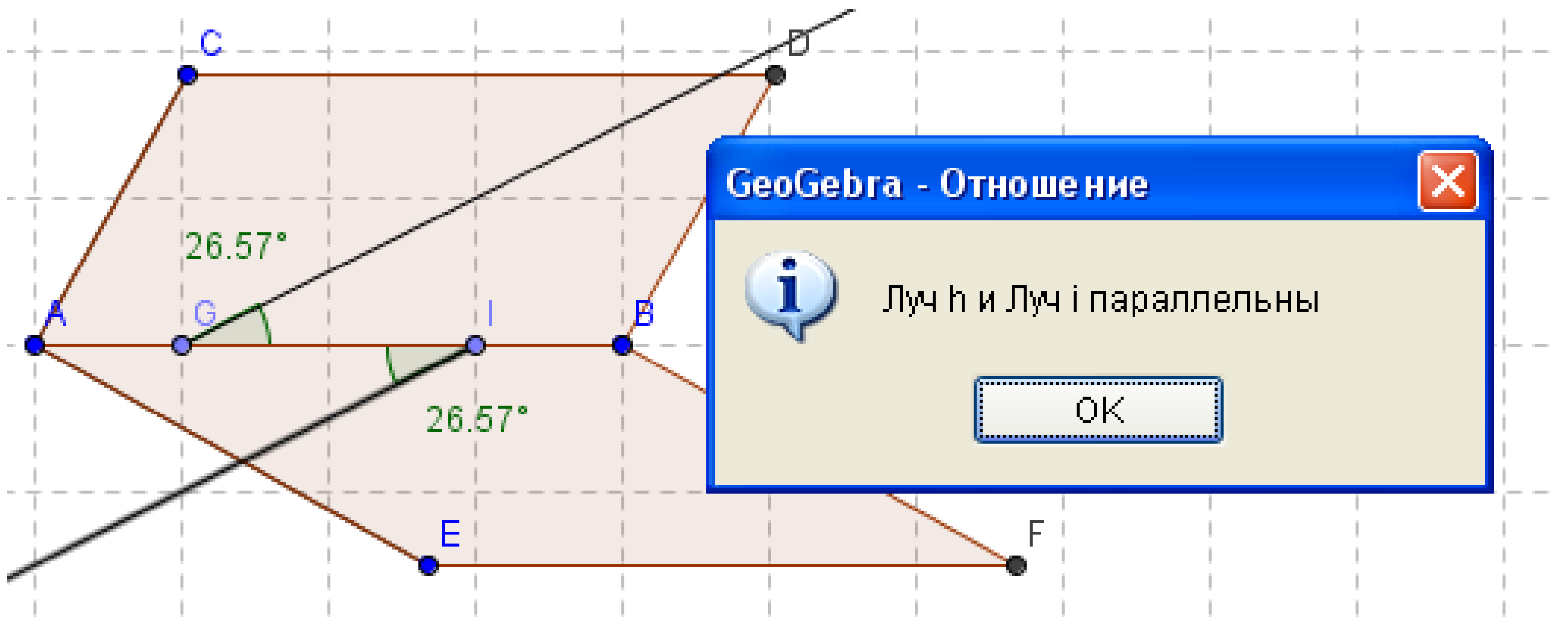
Достоинства	Недостатки
•Возможность реализации аксиоматико-дедуктивного подхода •Возможность решения стереометрических задач и доказательства теорем сведением к планиметрическим	•Изолированность пространственных и плоскостных аналогов •Длительная оторванность ШКГ от области приложений •Неразвитость пространственного мышления

«природная пространственная интуиция должна поневоле захиреть, если с самого начала приучать ребенка чертить исключительно на двумерной бумаге и тем искусственно ограничивать его наглядные представления»

Ф.Клейн

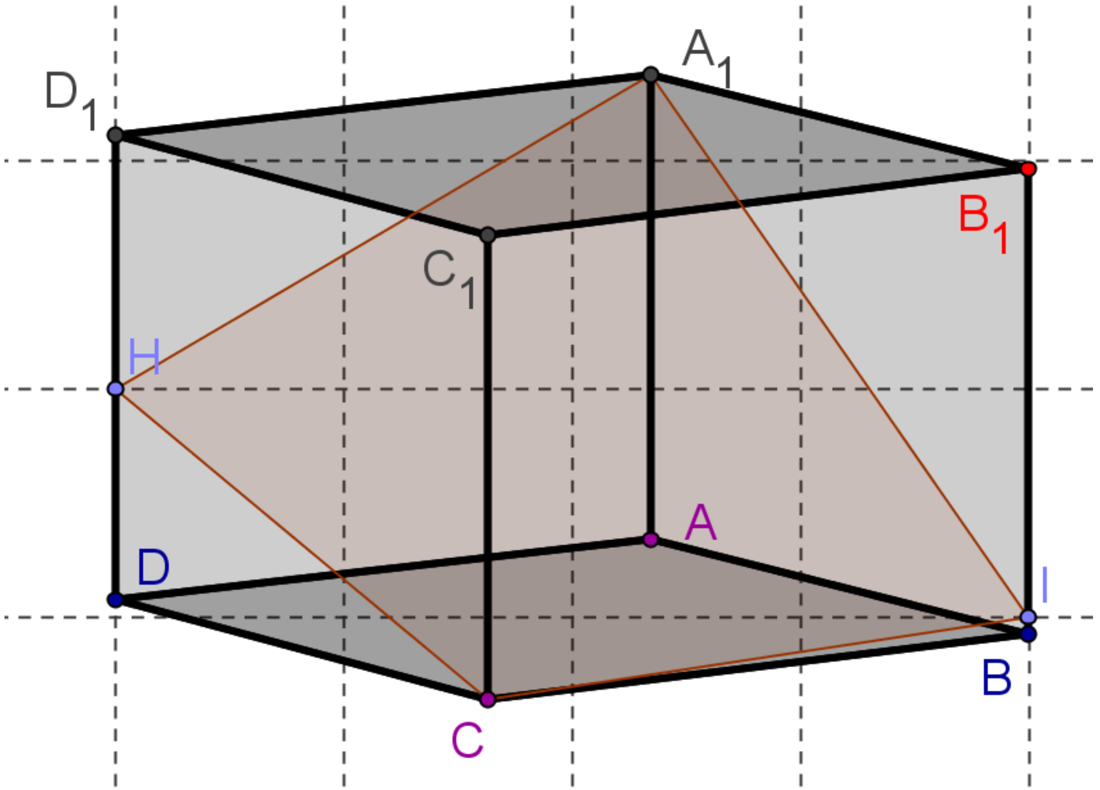
Типичные трудности учащихся планиметрия ➡ стереометрия

- Трудности пространственного восприятия проекционных изображений



Типичные трудности учащихся планиметрия → стереометрия

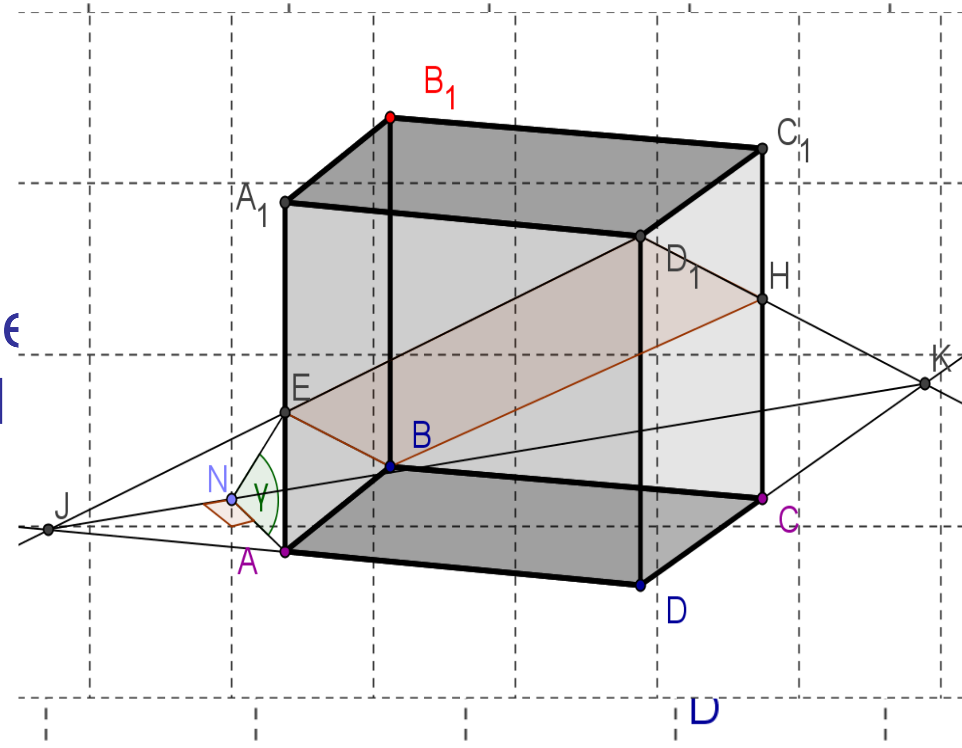
- Трудности различения свойств сохраняемых и искажаемых проекционным изображением



Типичные трудности учащихся планиметрия ➡ стереометрия

- Трудности конструирование пространственных образов и их проекционных изображений

В правильной четырехугольной призме ABCDA1B1C1D1 стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 5. На ребре AA1 отмечена точка E так, что AE:EA1=2:3. Найдите **угол между плоскостями ABC и BED1.**



Типичные трудности учащихся планиметрия ➡ стереометрия

- Трудности манипулирования пространственными образами для рационализации рассуждений

Пусть пирамиде ABCS основанием является треугольник ABS, а ее вершиной точка C (рис.9)

Данный образ позволяет значительно упростить решение задачи.

1. Найдем площадь основания – прямоугольного треугольника ABS: $S = \frac{1}{2} SA \cdot SB = \frac{1}{2} ab$.
2. Так как CS – высота пирамиды, то объем пирамиды может быть найден по формуле: $V = \frac{1}{3} S_{ABS} \cdot SC = \frac{1}{6} abc$.

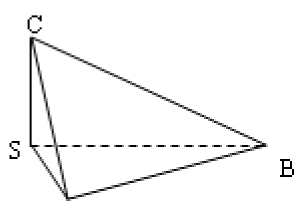


Рис. 9

Пример 1. Найти объем треугольной пирамиды, боковые ребра которой a, b и c, а все плоские углы при вершине прямые.

Пусть данная пирамида ABCS, где ABC – ее основание, S – вершина. Тогда условием задачи заданы длины боковых ребер: AS=a, BS=b, CS=c, а также плоские углы при вершине: $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = 90°$ (рис.8).

Этот образ геометрической конфигурации требует решения задачи следующим способом:

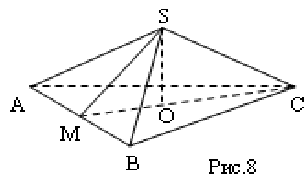


Рис.8

1. Из прямоугольных треугольников ASB, BSC, CSA по теореме Пифагора найдем длины сторон основания пирамиды: $AB = \sqrt{a^2+b^2}$; $BC = \sqrt{b^2+c^2}$; $AC = \sqrt{a^2+c^2}$.
2. По формуле Герона, найдем площадь основания пирамиды:

$$S = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}}{2} \times \frac{-\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}}{2} \times \frac{\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}}{2} \times \frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{a^2+c^2}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+c^2(a^2+b^2)}.$$

3. Найдем положение основания высоты пирамиды - точки O.

Так как все плоские углы при вершине S прямые, то SC⊥(ASB), следовательно, SC⊥AB. Проведем в треугольнике ABC высоту AB – CM, и рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямые MC и SC – прямоугольный треугольник CSM ($\angle MSC = 90°$).

Высота этого треугольника SO является и высотой пирамиды, так как SO⊥CM (по построению) и SO⊥AB, как прямая, лежащая в плоскости (SMC) перпендикулярной прямой AB.

4. Найдем длину высоты SO из треугольника MSC с использованием идеи «вспомогательной площади»: $SO \cdot MC = MS \cdot SC$, где из треугольника ABC $CM = \frac{\sqrt{a^2b^2+c^2(a^2+b^2)}}{\sqrt{a^2+b^2}}$, из прямоугольного треугольника FSB $MS = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Следовательно, $SO = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+c^2(a^2+b^2)}}$.
5. Найдем объем пирамиды по формуле: $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO$; $V = \frac{1}{6} abc$.

Идея фузионизма (первоначальная трактовка)

Идея слитного изучения нескольких предметов, в частности, планиметрии и стереометрии.

Этапы развития идеи фузионизма (по данным В.А.Гусева)

1751-1772гг. – первое упоминание идеи Ж.Даламбер «La grand Encyclopédia»;

1823 г. - I учебник, основанный на данной идее Н.И.Лобачевский «Геометрия»;

1825 г. – раскрыта методическая ценность идеи Ж.Жергонна для умственного развития учащихся.

XIX-XX вв. Клейновская реформа – пик популярности идеи.

Идея фузионизма (обновленная трактовка)

Пропедевтическое изучение геометрии во взаимосвязи планиметрических и стереометрических представлений при сохранении структуру и повышении уровня строгости систематического курса

(С.А.Богомолов, доклад на I Всероссийском съезде учителей математики 1911г.)

Реализация идеи фузионизма (в мягкой форме)

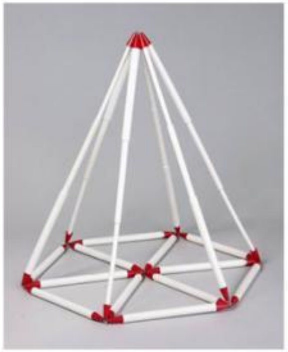
1. Курсы пропедевтического обучения геометрии 1-4, 5,6 классы.

Авторы: В.А.Пантищина, Н.С.Подходова, Г.Г.Ходот.

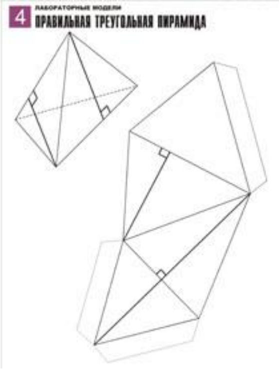
2. Учебно-методические комплекты пропедевтического и систематического обучения геометрии
Авторы: В.А.Гусев,
И.Ф.Шарыгин

Не получили широкого распространения в школах

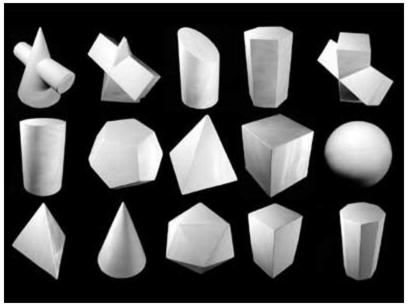
Средства обучения стереометрии, компенсирующие недостаток развития пространственного мышления



- Телескопический набор по стереометрии
- Набор разверток для лабораторных работ

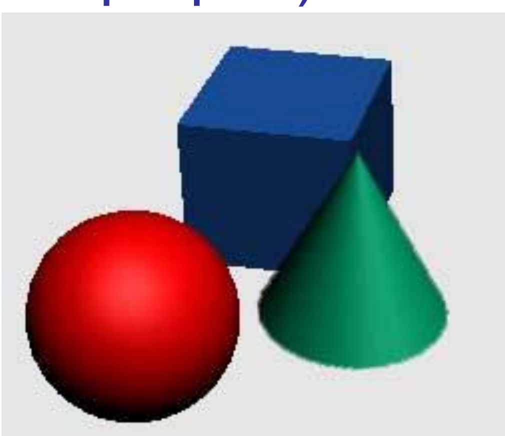


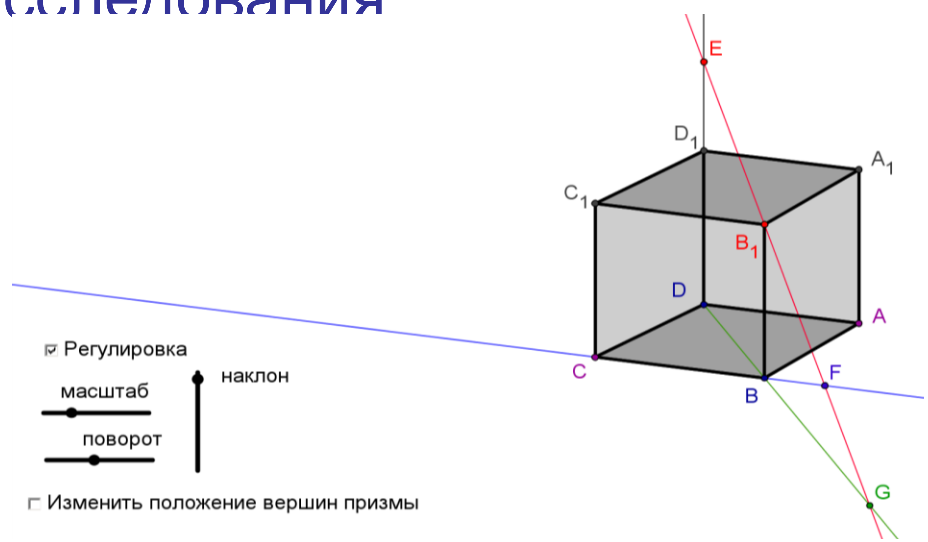
- Набор моделей пространственных тел



Виртуальные трехмерные модели

<table>
<tr><th>Демонстрационного типа</th><th>Инструментального типа</th></tr>
<tr><td>Изображения пространственных фигур созданные с помощью трехмерной графики (имитация фотографий)


</td><td>Двумерные проекционные изображения пространственных фигур, допускающие изменение ракурса изображения, дополнительные построения и исследования



</td></tr>
</table>

Требования к средствам создания виртуальных трехмерных моделей инструментального типа

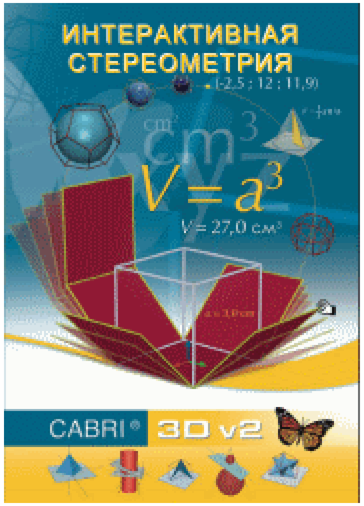
- Возможность динамического изменения ракурса изображения (эффект вращения);
- Возможность правильного изображения видимых и невидимых элементов (вершин ребер, граней): пунктир или не отображать;
- Возможность перспективы (центральная проекция с управляемым центром);
- Имитация освещенности.

Интерактивные геометрические среды с 3D режимом

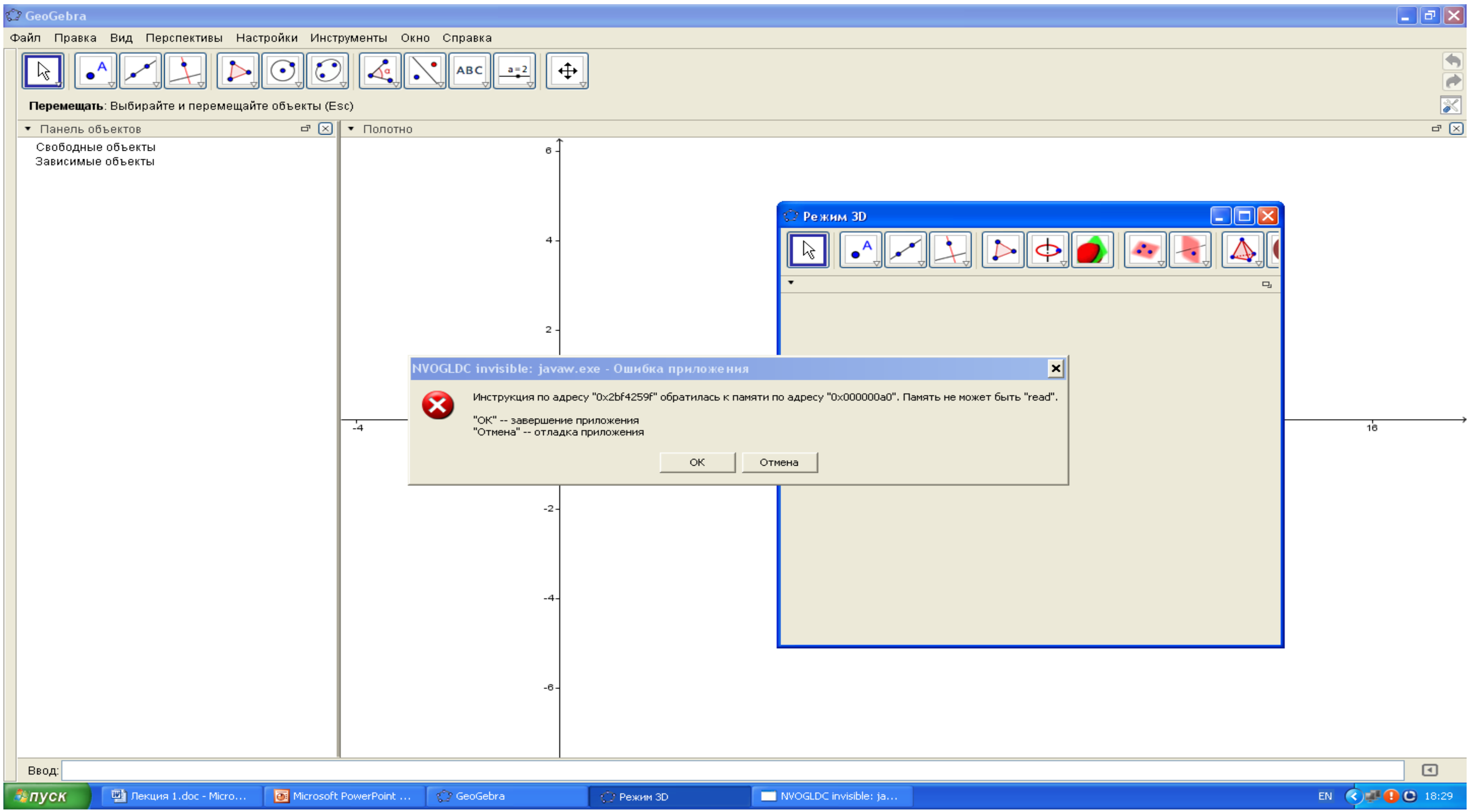
- Живая геометрия

(The Geometer,s Sketchpad)

- Интерактивная стереометрия Cabri 3D



Режим 3D в GeoGebra 5.0 Beta проблемы отладки



Возможности выхода в пространство GeoGebra

Выход в пространство (с технической точки зрения) – это преобразование двумерных виртуальных моделей в трехмерные за счет добавления эффектов:

- вращения;
- правильного изображения скрытых элементов;
- задания пространственного фона.

Kub_1.ggb **Tetraedr.ggb**

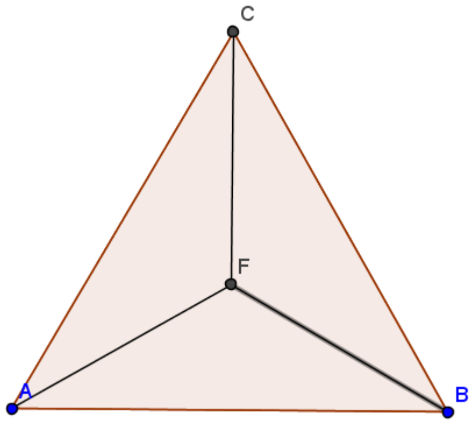
«Выход в пространство» с GeoGebra

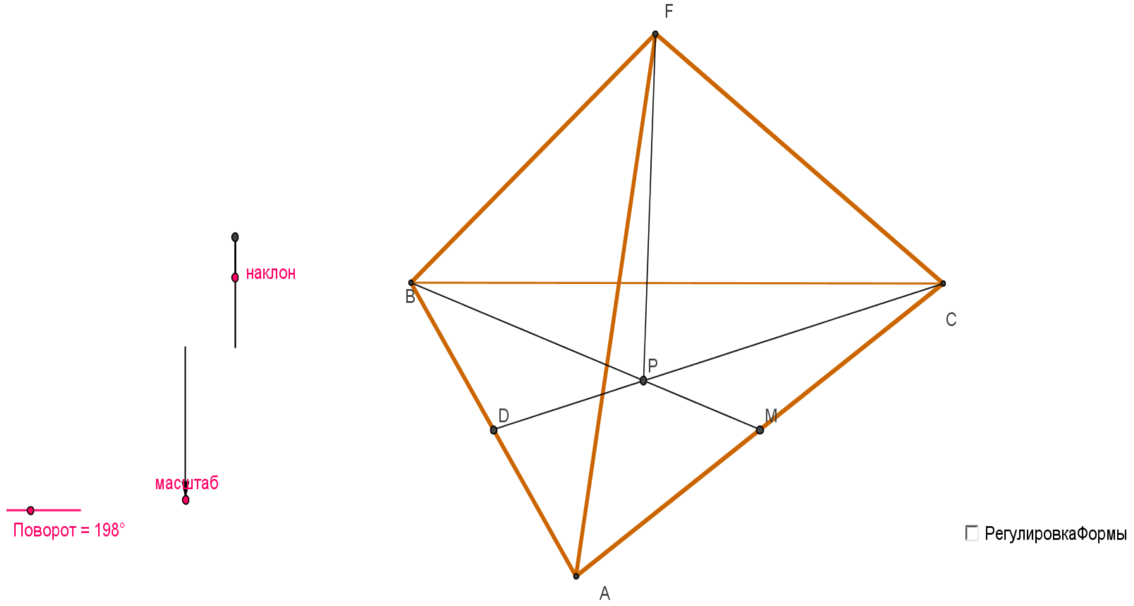
- **Выход в пространство**

  (с методической точки зрения) – это постановка перед учащимися задачи или серии задач, решение которых явно или неявно требует преобразования или дополнения планиметрического образа задачной ситуации пространственным.

Выход в пространство, как условие разрешимости неопределенно поставленной задачи

Можно ли расположить четыре точки так, чтобы все отрезки, с концами в этих точках были одинаковыми?

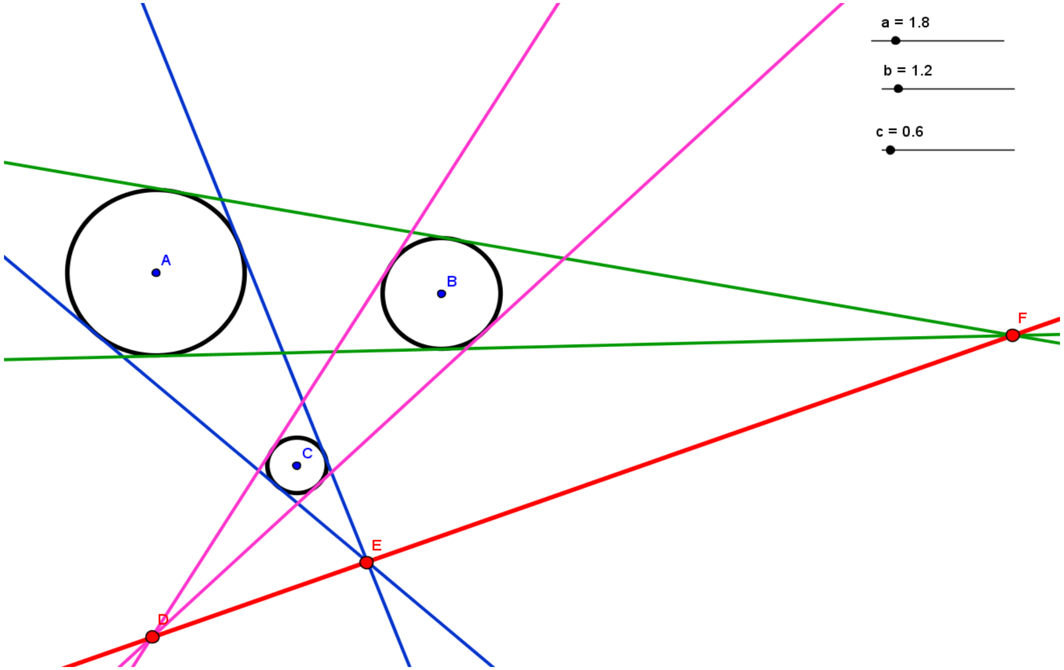


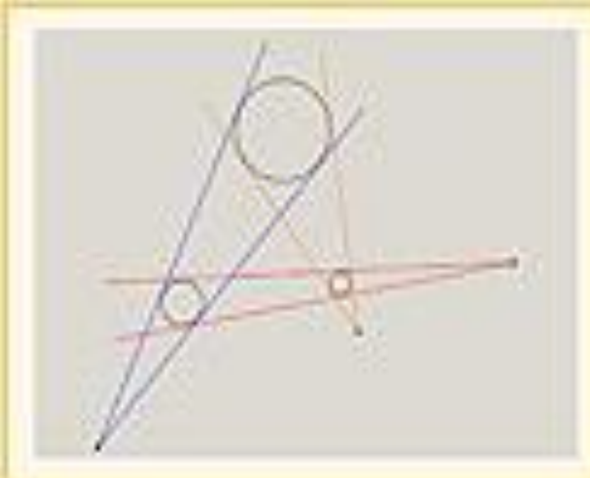


Выход в пространство, как условие доказательности планиметрического утверждения

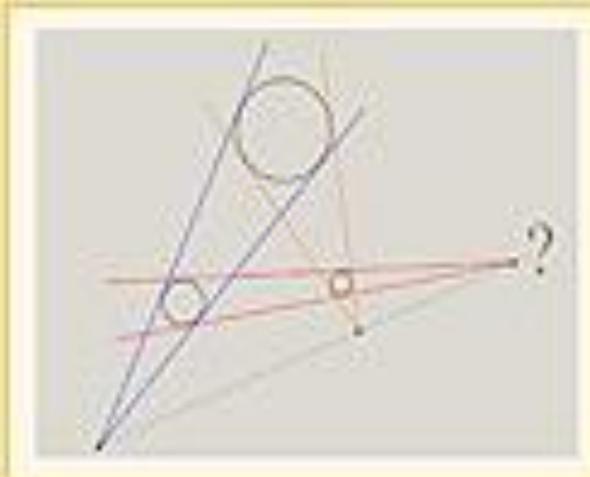
Доказать, что для трёх произвольных окружностей, каждая из которых не лежит целиком внутри другой, точки пересечения общих внешних *касательных* к каждой паре окружностей лежат на одной прямой. (Теорема Гаспара Монжа)

Теорема_Монжа.ggb

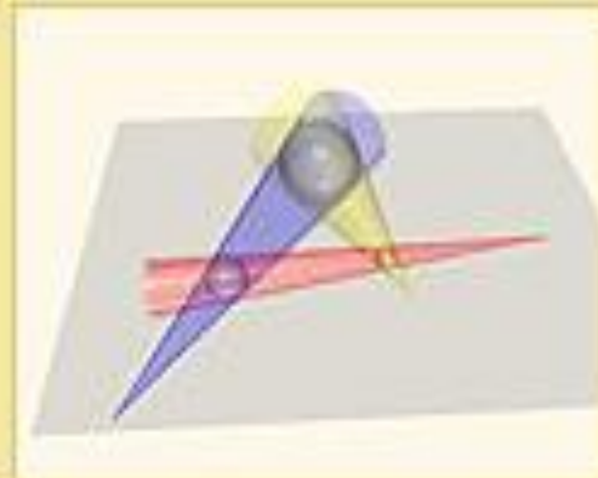




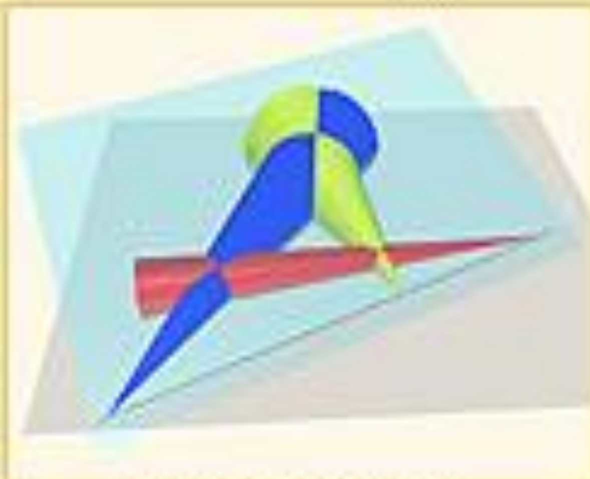
Постановка задачи



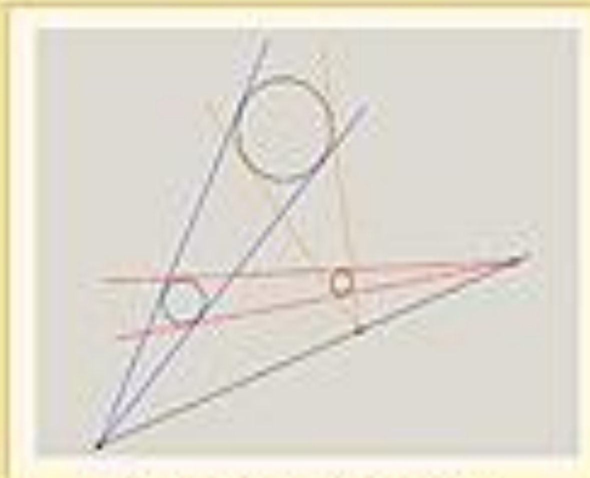
Гипотеза



Выход в пространство



Пересечение плоскостей

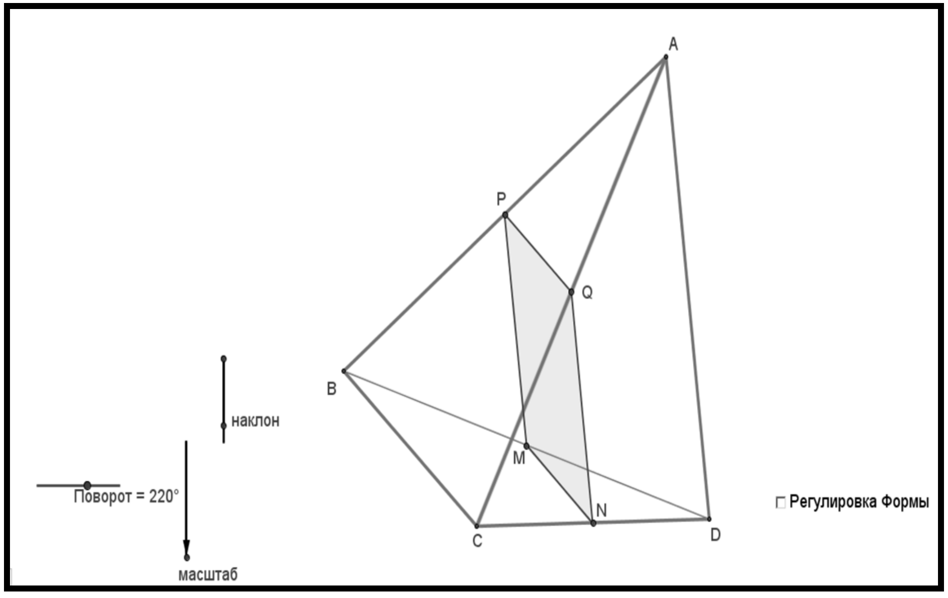


Теорема Монжа

Выход в пространство, как иной взгляд на задачную ситуацию

1. В четырехугольнике ABCD со сторонами BC = 14 и DA = 12 проведены диагонали AC и BD. Точки M, N, Q и P являются соответственно серединами отрезков BD, CD, CA и BA. Установите вид и найдите периметр четырехугольника MNQP. .

2. Дана пирамида ABCD, такая что BC=14, DA=12. Точки M, N, Q и P являются соответственно серединами ребер BD, CD, CA и BA. Установить вид и найти периметр четырехугольника MNQP.



Выход в пространство как преодоления ограниченности выразительных возможностей понятийного аппарата планиметрии

Пример. «Определите взаимное расположение прямых, изображенных на рисунках 1 и 2».

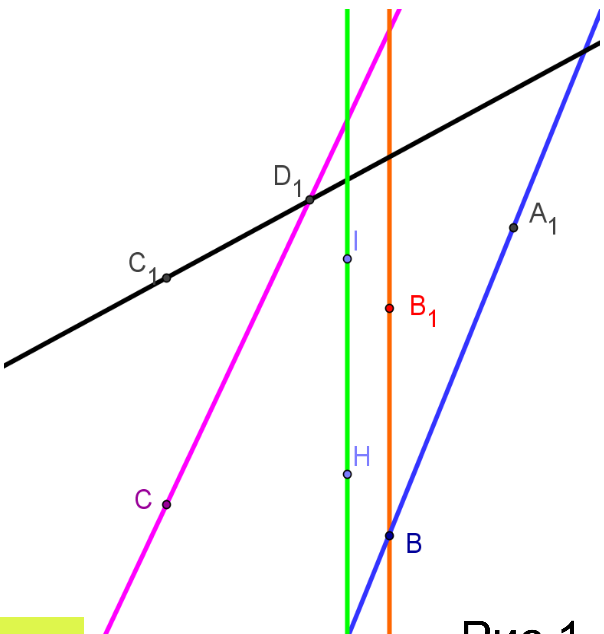


Рис.1

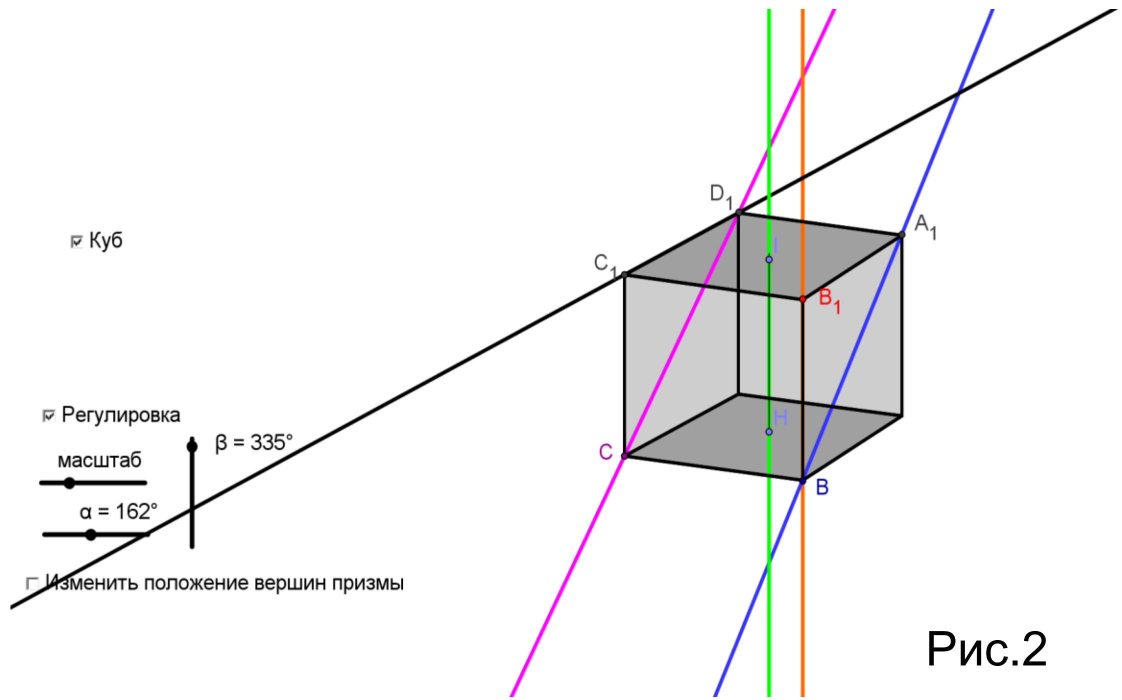
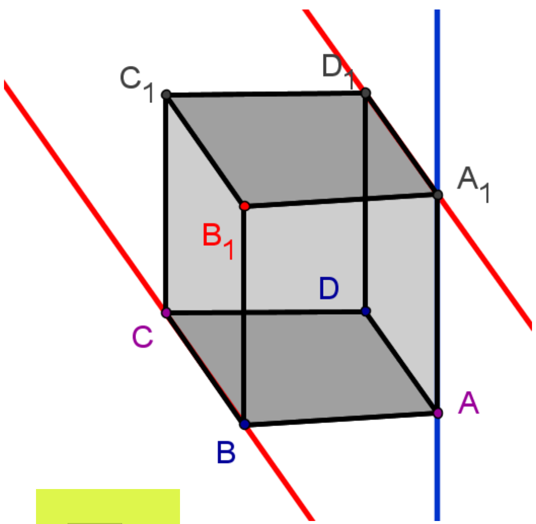


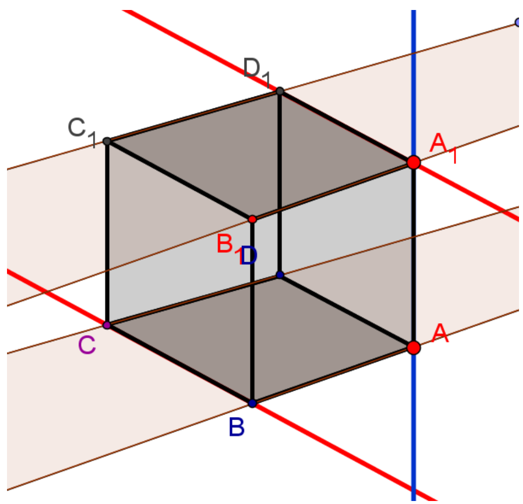
Рис.2

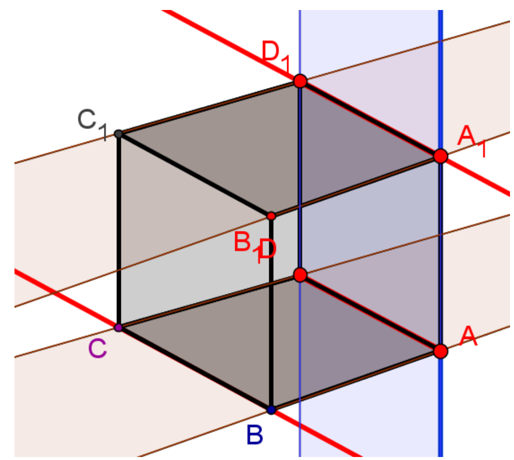
Мотивация необходимости уточнения понятия параллельных прямых и введения понятия скрещивающихся прямых

Выход в пространство как получение и проверка истинности пространственных аналогов планиметрических теорем

Теорема планиметрии. Если **прямая** пересекает одну из двух параллельных **прямых**, то **она** пересекает и другую







Возможности «ухода на плоскость» Cabri 3D

Уход на плоскость (с технической точки зрения) – это преобразование трехмерных виртуальных моделей в двумерные за счет использования эффектов:

- вращения виртуальных 3D моделей (для рассмотрения значимой части изображения без искажений);
- скрытия незначимой части изображения.

«Уход на плоскость» с Cabri 3D

Уход на плоскость (с методической точки зрения) – это использование в ходе учебного познания приема сведения стереометрической задачи к планиметрической или выделения из нее планиметрической подзадачи или серии подзадач.

Уход на плоскость как метод построения вспомогательного сечения

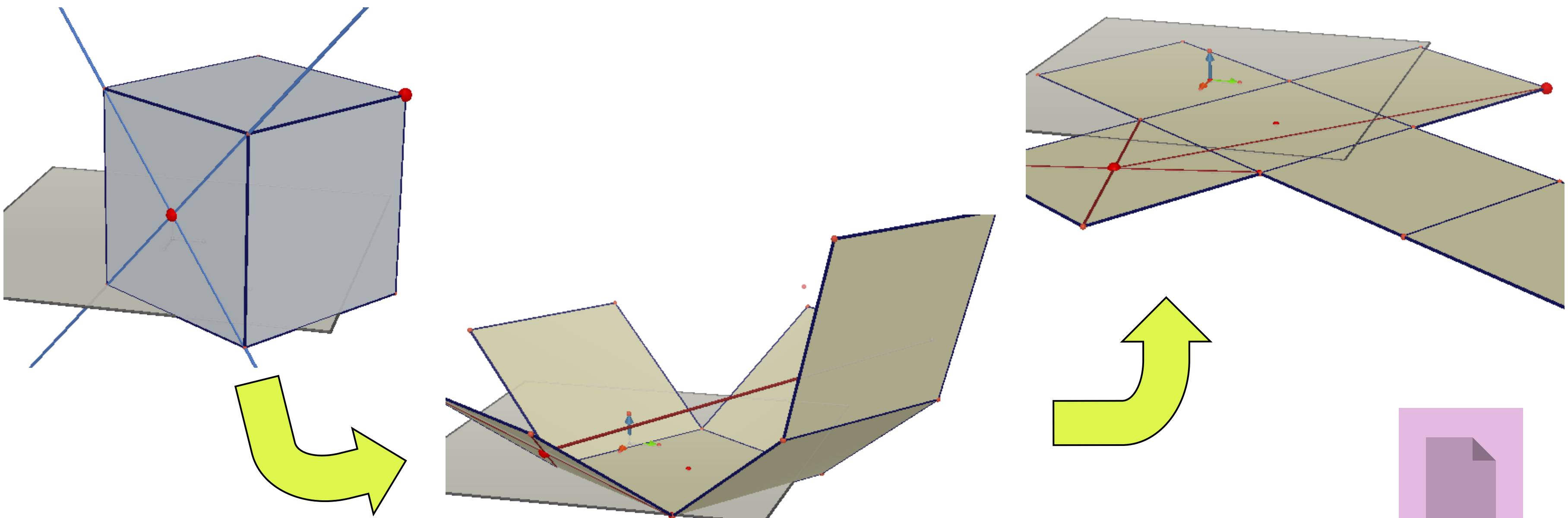
Задача 1. Два скрещивающихся ребра тетраэдра равны 4 и 12, а остальные ребра – по 7. Найти расстояние от центра вписанной в тетраэдр сферы до его наибольшего ребра

Уход на плоскость как метод построения проекций

Задача 2. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник, причем $AC=CB=a$. Точка D_1 делит ребро A_1C_1 в отношении 1:2, считая от точки A. Найти расстояние между ребром CC_1 и прямой BD_1.

Уход на плоскость как метод построения развертки

Задача 3. Ребро куба равно 2. Найти расстояние по его поверхности от центра одной из его граней до вершины, противолежащей грани.



Соединение технических возможностей ИГС по созданию виртуальных 3D моделей инструментального типа с методическими достоинствами **«Выхода в пространство»** и **«Ухода на плоскость»** позволяет подойти к решению проблемы **развития пространственного мышления учащихся при сохранении традиции разделения геометрии на планиметрию и стереометрию**

Спасибо за внимание!