З А Д А Ч И Д Л Я 11 К Л А С С А

Первые 5 задач оцениваются по 3 балла, задача 6 с открытым ответом оценивается 5 баллами, а задача 7 с подробным решением оценивается 10 баллами.

Время на работу 120 мин.

Задача 1. Сколько последовательностей являются геометрическими прогрессиями?

$a_n:\ 2+\sqrt{3},\quad 2+3\sqrt{3},\quad 2+5\sqrt{3}$; $\qquad b_n:\ 2+\sqrt{3},\quad 2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2,\quad -4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}+6$;

$c_n:\ -3,\ 9,\ -18$; $\qquad d_n:\ 3^2,\ 3^4,\ 3^8$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

Задача 2. Найдите 12-ый член a_{12} арифметической прогрессии, если среднее арифметическое 2-го и 22-го членов е равно 36, т.е. $\frac{a_2+a_{22}}{2}=36$.

A) 36 **B)** 45 **C)** 54 **D)** 63 **E)** 72

Задача 3. Танцевальная группа состоит из 12 танцоров, из которых 9 мужчин и 3 женщины. Сколькими способами можно выбрать трех танцоров с участием хотя бы одной женщины?

A) 45 **B)** 98 **C)** 136 **D)** 1108 **E)** 1320

Задача 4. Решите показательное неравенство $4^x-16\cdot 2^x>0$.

A) $x>0$ **B)** $x<0$ **C)** $x\in(0;4)$ **D)** $x\in(4;+\infty)$ **E)** $x\in(-\infty;4)$

Задача 5. В равнобедренном ΔABC с основанием $AB=6$ и боковыми сторонами $AC=BC=4$ точка C_1 - середина AB, точка B_1 - середина AC, а точка $M\in AC_1$ такая, что ΔMC_1B_1 равнобедренный ($MB_1=C_1B_1$). Найдите радиус окружности, вписанной в ΔMC_1B_1.

A) 3 **B)** $\sqrt{7}$ **C)** $3\sqrt{7}$ **D)** $\frac{3\sqrt{7}}{14}$ **E)** $\frac{3}{14}$

Задача 6. Найдите сумму первых 5 членов арифметической прогрессии натуральных чисел, если сумма квадратов этих пяти членов равна 330.

Задача 7. В футбольном турнире участвали $n+5$ команд, причем любые две из них сыграли между собой не более одного матча. Известно, что 5 команд сыграли ровно 5 игр, а остальные n команд сыграли ровно n матчей. Найдите максимально возможное количество команд, которые приняли участие в этом турнире.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ДЛЯ 11 КЛАССА

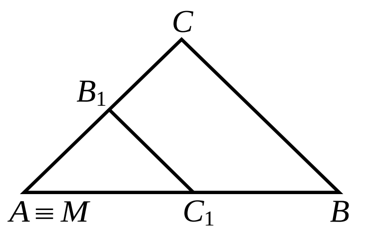
1. Ответ B). Первые три числа не образуют геометрическую прогрессию. Они образуют арифметическую прогрессию с разностью $2\sqrt{3}$. Вторая тройка чисел образует геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{2}-1$. Это можно заметить следующим образом. Имеем $b_2 = 2\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-2 = \sqrt{2}(2+\sqrt{3})-1\cdot(2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}-1) = b_1\cdot(\sqrt{2}-1)$. После этого остается проверить, что $b_3 = -4\sqrt{2}+3\sqrt{3}-2\sqrt{6}+6 = b_1(\sqrt{2}-1)^2 = b_1(3-2\sqrt{2}) = (2+\sqrt{3})\cdot(3-2\sqrt{2})$. Для завершения проверки достаточно раскрыть скобки в последнем произведении. Третья тройка чисел не образует геометрическую прогрессию, т.к. $9^2 \neq (-3)\cdot(-18)$. Последняя последовательность также не является геометрической прогрессией, потому что $(3^4)^2 = 3^8 \neq 3^{10} = 3^2\cdot 3^8$. Поэтому только одна из последовательностей является геометрической прогрессией.

2. Ответ A). Так как 1 2– 2= 2 2– , то 12-й член одинаково удален от 2-го и 22-го членов прогрессии. Из свойств аритметической прогрессии следует, что 12-й член равен среднему аритметическому 2-го и 22-го членов, т.е. $a_{12} = 36$.

3. Ответ C). Если все три танцора женщины, то их можно выбрать одним способом (взять всех). Если среди трех танцоров ровно 2 женщины, то этих двух женщин из трех можно выбрать $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$ способами. (Первую женщину можно выбрать тремя способами, вторую – двумя. Получим $3\cdot 2 = 6$ способов. Полученное число способов необходимо разделить на 2, так как выборки отличающиеся порядком одинаковы. Выбор Оли и Кати тоже самое, что и выбор Кати и Оли.) Третьего танцора - мужчину, можно выбрать 9 способами. Получим $3\cdot 9 = 27$ вариантов выбрать трех танцоров, среди которых ровно две женщины. Если среди выбранных трех танцоров ровно одна женщина, то ее можно выбрать 3 способами. Двух мужчин из 9 можно выбрать $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$ способами. Таким образом, существует $3\cdot 36 = 108$ вариантов выбрать трех танцоров, среди которых ровно одна женщина. Окончательно получим, что существует всего $1+27+108 = 136$ способов выбрать трех танцоров с участием хотя бы одной женщины.

4. Ответ D). $4^x - 16\cdot 2^x > 0 \Leftrightarrow\ 2^{2x} > 2^4\cdot 2^x \Leftrightarrow\ 2^{2x} > 2^{4+x} \ \Leftrightarrow\ 2x > 4+x \ \Rightarrow\ x > 4$.

5. Ответ D). Так как B_1C_1 средняя линия ΔABC, то $B_1C_1 = \frac{BC}{2} = AB_1 = 2$. Откуда следует, что $M \equiv A$. Воспользуемся формулой $S = p\cdot r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ для ΔAC_1B_1. Так как $p = \frac{3+2+2}{2} = \frac{7}{2}$, то



$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)^2\left(\frac{7}{2}-3\right)\cdot}}{\frac{7}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{4}\cdot 3\sqrt{7}}{7} = \frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

6. Ответ 40. Обозначим средний (третий) член прогрессии через *a*, а через *d* разность прогрессии. Тогда $(a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2 = 330$, откуда $5a^2+10d^2 = 330$, т.е. $a^2+2d^2 = 66$. Решим полученное Диофантова уравнения с помощью перебора: $a=1 \Rightarrow 2d^2 = 65$ (не приводит к решению); $a=2 \Rightarrow 2d^2 = 61$ (не приводит к решению); $a=3 \Rightarrow 2d^2 = 55$ (не приводит к решению); $a=4 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = \pm 5$ (в обоих случаях в прогрессии будут отрицатеоьные числа, что противоречит условию); $a=5 \Rightarrow 2d^2 = 41$ (не приводит к решению); $a=6 \Rightarrow d^2 = 15$ (не приводит к решению); $a=7 \Rightarrow 2d^2 = 17$ (не приводит к решению); $a=8 \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = \pm 1$; при $a \geq 9$ левая сторона уравнения становится больше, чем правая, и не представляется возможным получить решения. Таким образом, существуют две прогрессии натуральных чисел 6, 7, 8, 9, 10 и 10, 9, 8, 7, 6, удовлетворяющие условию задачи. Сумма членов каждой из них равна 40.

7. Ответ 30. Пусть $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ множество команд, которые сыграли по 5 игр, $B=\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ множество команд, которые сыграли по n игр, а s количество матчей команд из A с командами из B. Так как каждая команда из A сыграла не более чем 5 игр с командами из B, то $5\cdot 5=25\geq s$. С другой стороны, каждая команда из B сыграла не более $n-1$ матча с другими командами из B и, следовательно, сыграла не менее 1 матча с командой из A. Значит, $n\leq s$, откуда $n\leq 25$. Покажем, что случай $n=25$ может быть реализован. Таким образом, максимальное возможное число команд $n+5=25+5=30$ является ответом к задаче. Обозначим $B_1=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, $B_2=\{b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$, $B_3=\{b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}\}$, $B_4=\{b_{16}, b_{17}, b_{18}, b_{19}, b_{20}\}$ и $B_5=\{b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, b_{25}\}$. Пусть все команды группы B сыграют друг с другом и пусть для каждого i от 1 до 5 команда a_i сыграла со всеми командами из B_i. Понятно, что этот пример удовлетворяет всем условиям задачи.

Критерии оценки выполнения задания: Указанный верный ответ 30 оценивается 1 баллом. Реализация 30 команд добавляет 7 баллов, а правильное доказательство того, что команд не может быть больше 30, оценивается в 2 балла. Частичные верные результаты могут быть оценены в 1 балл, но не более 3 баллов.