З А Д А Ч И Д Л Я 9 К Л А С С А

Первые 5 задач оцениваются по 3 балла, задача 6 с открытым ответом оценивается 5 баллами, а задача 7 с подробным решением оценивается 10 баллами.

Время на работу 120 мин.

Задача 1. На экзамен по математике могут войти задачи по 25 темам. Один ученик успел подготовить только 20 тем. На экзамене было 3 задачи по разным темам. Какова вероятность, что этот ученик сможет решить все три задачи?

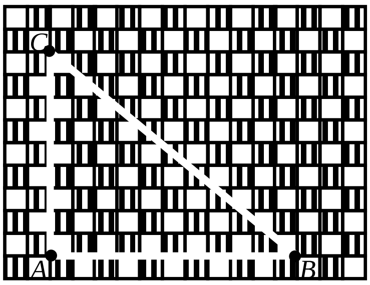
A) $\frac{574}{1135}$ **B)** $\frac{536}{2145}$ **C)** $\frac{1368}{3125}$ **D)** $\frac{57}{115}$ **E)** другой ответ

Задача 2. В начале 2018 года фирма внедрила в производство станок стоимостью 2000 лева. Ожидаемая выручка на конец года составляет 2850 лв, а затраты на техническое обслуживание станка за этот период оцениваются в 650 лв. Другая фирма в начале 2018 года положила 2000 лв на один год на счет в банке, процентная ставка которого в рассматриваемом году составляла 5%. Найдите разность между ожидаемой выручкой двух фирм на конец 2018 года.

A) 50 лв **B)** 100 лв **C)** 150 лв **D)** 200 лв **E)** 250 лв

Задача 3. Пусть $x_1 < x_2$ корни уравнения $x^2 - 6x + 4 = 0$. Какое из следующих утверждений **неверно**?

A) $x_1 > 0$ **B)** $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} > 0$ **C)** $x_1^2 + x_2^2 = 28$ **D)** $\sqrt{2x_1} + \sqrt{2x_2} = 2$ **E)** $x_1^3 + x_2^3 = 12^2$



Задача 4. На шахматной доске 16×12 с черными и белыми квадратиками со стороной 1 см выделен прямоугольный треугольник ABC с катетами 11 см и 9 см, как показано на рисунке. Найдите площадь черной части внутренней области треугольника. Ответ записан в квадратных сантиметрах.

A) 28,75 **B)** 27,5 **C)** 26 **D)** 25,75 **E)** 24,5

Задача 5. Найдите количество целочисленных решений неравенства $x^2 - (a-3)x - 3a < 0$, если a - наименьшее натуральное число, которое удовлетворяет неравенству $a^2 + a - 2 \geq 0$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** больше 3

Задача 6. Найдите произведение чисел a, b и c, если $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=14$ и $a^3+b^3+c^3=36$.

Задача 7. Взяли произвольное трехзначное число. Какова вероятность того, что неотрицательная разность между выбранным числом и трехзначным числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 36? Обоснуйте свой ответ!

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ДЛЯ 9 КЛАССА

1. Ответ. D). Искомая вероятность равна $\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}$.

2. Ответ B). В конце года первая фирма получит $2850-650=2200$ лв. Поскольку стоимость станка 2000 лв, то ее прибыль $2200-2000=200$ лв. Так как вторая фирма положила 2000 лв под 5%=0,05, то через год на счете будет $2000(1+0{,}05)=2100$ лв и ее прибыль составит $2200-2100=100$ лв. Искомая разность $200-100=100$ лв.

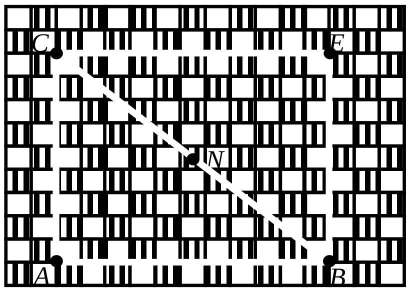
3. Ответ D). Так как дискриминант $D=36-16=20>0$, то уравнение имеет два действителных корня. По теореме Виета имеем $x_1+x_2=6$ и $x_1x_2=4$, откуда получим, что оба корня положительны. Следовательно, утверждение **A)** верно. Кроме того $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0$, причем числитель и знаменатель дроби $\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}$ положительны. Значит, утверждение **B)** верно. Далее имеем $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=6^2-2\cdot4=36-8=28$ и, следоватедно, **C)** – верно.

Так как $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)=6\cdot(6^2-3\cdot4)=6\cdot24=12^2$, то утверждение **E)** верно. Единственая зависимость **D)** не является верной. Действительно

$$\sqrt{2x_1}+\sqrt{2x_2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)=\sqrt{2}\sqrt{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2}=\sqrt{2}\sqrt{\left(x_1+2\sqrt{x_1}.\sqrt{x_2}+x_2\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{\left((x_1+x_2)+2\sqrt{x_1x_2}\right)}=\sqrt{2}\sqrt{6+2\sqrt{4}}=\sqrt{2}\sqrt{6+2\cdot2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{20}\neq2.$$

4. Ответ E). Дополним треугольник до прямоугольника *ABEC*, как показано на рисунке. Треугольник *BEC* симметричен треугольнику *ABC* относительно середины *N* гипотенузы *BC*, которая является центром симметрии прямоугольника (совпадает с точкой пересечения диагоналей). Следовательно, черные части в этих двух треугольниках имеют одинаковую площадь. В прямоугольнике имеется ровно 49 черных квадратика, общая площадь которых 49 см^2**.** Следовательно, искомая площадь $49:2=24{,}5$ см^2 **.**



5. Ответ D). Так как $a^2+a-2=(a+2)(a-1)$, решением неравенства $a^2+a-2\geq0$ явлется мнжество $(-\infty;-2]\cup[1;+\infty)$, а наименьшее натуральное число, которое ему принадлежит, равно 1. С другой стороны $x^2-(a-3)x-3a=(x+3)(x-a)$ и решением неравенства $x^2-(a-3)x-3a<0$ при $a=1$ является интервал $(-3;1)$. Целые числа в этом интервале: $-2,-1,0$. Их число равно 3.

6. Ответ 6. Возведем первое равенство в квадрат и вычтем из него второе. Получим $2(ab+bc+ca)=36-14=22$, т.е. $ab+bc+ca=11$. Затем применим тождество

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \text{ (Проверьте!)}$$

Откуда $36-3abc=6(14-11)$ и, следовательно, $abc=6$.

Замечание. Приведенное выше решение является авторским. В нем строго доказано, что $abc=6$ и никаких других значений указанное произведение принимать не может. Однако, можно заметить, что числа 1, 2 и 3 удовлетворяют всем ограничениям. Их произведение равно 6. Это наблюдение позволяет дать правильный ответ, но оно не является правильным решением.

7. Ответ $\mathbf{\frac{1}{54}}$. Если $\overline{abc}$ трехзначное число, то $a\neq0$. Для того чтобы три цифры, записанные в обратном порядке, образовывали трехзначное число, необходимо $c\neq0$. Количество трехзначных чисел с этим свойством равно $9\cdot10\cdot9=810$. Так как рассматриваемая разность должна быть неорицательной, то $a \ge c$. Имеем $\overline{abc} - \overline{cba} = 100(a-c) + 10(b-b) + (c-a) = 99(a-c)$. Число 99 делится 9 , а так как $36 = 9 \cdot 4$, необходимо чтобы $a-c$ делилось на 4. Это возможно, если $a-c=0$, 4 или 8. Условие $a-c=0$ реализуется в 9 случаях: $a=c=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9. Условие $a-c=4$ возможно в 5 случаях: $a=5, c=1$; $a=6, c=2$; $a=7, c=3$; $a=8, c=4$ и $a=9, c=5$. Условие $a-c=8$ возможно в 1 случае: $a=9, c=1$. Общее число благоприятных исходов $9+5+1=15$. Значит, искомая вероятность $\frac{15}{810} = \frac{1}{54}$.

Критерии оценки выполнения задания: Нахождение общего количества трехзначных чисел, соответствующих условию, оценивается в 1 балл. Правильно найдено число благоприятных исходов - оценивается в сумме 8 баллами, из которых 3 балла за доказательство того, что разность трехзначных чисел делится на 9, 1 балл для случая $a=c$ и по 2 балла для двух других случаев. Правильное вычисление вероятности оценивается в 1 балл, что, в частности, означает, что правильный ответ без доказательства оценивается в 1 балл.