ЗАДАЧИ ДЛЯ 8 КЛАССА

Первые 5 задач оцениваются по 3 балла, задача 6 с открытым ответом оценивается 5 баллами, а задача 7 с подробным решением оценивается 10 баллами.

Время на работу 120 мин.

Задача 1. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать трех учеников для участия в новогодней программе?

A) 25 **B)** 75 **C)** 250 **D)** 2300 **E)** 4600

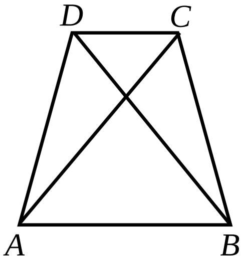
Задача 2. Сколькими различными способами можно расположить натуральные числа от 1 до 10 включительно, чтобы сумма каждых двух соседних чисел была нечетной?

A) 45 **B)** 90 **C)** 4500 **D)** 14 400 **E)** 28 800

Задача 3. В начале 2018 года фирма внедрила в производство станок стоимостью 2000 лева. Ожидаемая выручка на конец года составляет 2850 лв, а затраты на техническое обслуживание станка за этот период оцениваются в 650 лв. Другая фирма в начале 2018 года положила 2000 лв на один год на счет в банке, процентная ставка которого в рассматриваемом году составляла 5%. Найдите разность между ожидаемой выручкой двух фирм на конец 2018 года.

A) 50 лв **B)** 100 лв **C)** 150 лв **D)** 200 лв **E)** 250 лв

Задача 4. Каждая из диагоналей трапеции равна сумме оснований. Чему равен угол между диагоналями?



A) 60^0 **B)** 90^0 **C)** 105^0

D) 120^0 **E)** 135^0

Задача 5. Из вершины B прямоугольника $ABCD$ опущен перпендикуляр BE $(E \in AC)$ на диагональ AC. Пусть M и N середины отрезков AE и CD соответственно. Найдите $\angle BMN$.

A) 60^0 **B)** 90^0 **C)** 105^0 **D)** 120^0 **E)** 135^0

Задача 6. Пусть числа a и b, где $a \neq -b$, удовлетворяют равенствам $a = b^4 + 13b^3$ и $a^3 = 13b^2 + 1$. Найдите значение выражения $a^2b - ab^2 + b^3$.

Задача 7. Пусть $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ перестановка чисел $\{1, 2, ..., n\}$, при которой числа a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, …, $a_1 + a_2 + ... + a_n$ дают различные остатки при делении на n. Найдите перестановку с этим свойством, если:

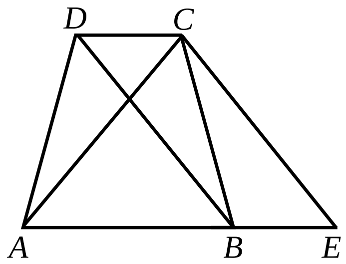
а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) $n = 6$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

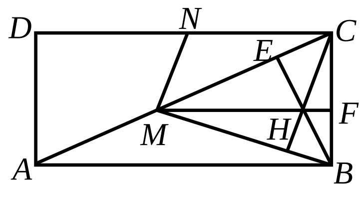
1. Ответ. D). Ответом является число сочетаний из 25 элементов по 3, т.е. $C_{25}^{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2300$. Объясним, откуда получился такой ответ. Пусть имеется три фиксированные роли, например, Заяц, Волк, Дед Мороз, на которые мы хотим поставить трех человек. На роль Зайца (З) можно поставить любого из 25 учеников. После этого в классе останутся 24 ученика, один из которых может играть роль Волка (В). И, наконец, роль Деда Мороза (ДМ) может играть любой из $25-2=23$ учеников. Таким образом, на три фиксированные роли трех учеников можно выбрать $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ способами. При таком выборе мы учитываем порядок учеников в тройке, т.е. кто какую роль играет. Однако в нашем случае не важно, кто из учеников Заяц, кто Волк, а кто Дед Мороз. Все 13800 способов выбора упорядоченной тройки человек разобьются на классы комбинаций, которые отличаются только порядком ролей. Каждый такой класс содержит 6 одинаковых комбинаций (З, В, ДМ; З, ДМ, В; В, З, ДМ; В, ДМ, З; ДМ, З, В; ДМ, В, З). Значит, чтобы найти число способов выбрать 3 человека из 25 (без учета порядка или без назначения ролей) необходимо 13800 разделить на 6. Получим $13800 : 6 = 2300$ различных способов.

2. Ответ Е). Сумма двух соседних чисел нечетна, если они имеют разную четность. Таким образом, четные и нечетные числа должны чередоваться. Пусть на первом, третьем, пятом, седьмом и девятом местах стоят нечетные числа. На первое место можно поставить любое из пяти нечетных чисел, на третье место – любое из четырех оставшихся, на пятое – любое из трех, на седьмое – любое из двух, последнее пятое нечетное число поставим на девятое место. Таким образом, нечетные числа можно расставить $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (читается 5-факториал) способами. Аналогично, четные числа на четные места можно поставить тоже 120 способами. Получим $120 \cdot 120 = 14400$ способов расположить числа так, что они чередуются, начиная с нечетного. Но на нечетных местах могут стоять четные числа, а на четных местах – нечетные. Получим еще 14400 вариантов. Таким образом, всего имеется $14400 + 14400 = 28800$ способов, расставить числа от 1 до 10 так, чтобы сумма соседних была нечетной.

3. Ответ В). В конце года первая фирма получит $2850-650=2200$ лв. Поскольку стоимость станка 2000 лв, то ее прибыль $2200-2000=200$ лв. Так как вторая фирма положила 2000 лв под 5%=0,05, то через год на счете будет $2000(1+0{,}05)=2100$ лв и ее прибыль составит $2200-2100=100$ лв. Искомая разность $200-100=100$ лв.



4. Ответ А). Через точку C, параллельно диагонали BD, проведем прямую, которая пересекает продолжение основания AB в точке E. Тогда $BECD$ параллелограмм и $BE = CD$. Кроме того, $AC = BD = CE = AB + DC = AB + BE = AE$, откуда ΔAEC равносторонний. Значит, $\angle ACE = 60^\circ$. Так как $BD \parallel CE$, то угол между диагоналями тоже равен 60°.



5. Ответ В). Проведем $MF \perp BC$ ($F \in BC$). Пусть MF пресекает BE в точке H. Так как MF и BE высоты в ΔMBC, то H его ортоцентр (точка пересечения высот). Значит, $CH \perp MB$. С другой стороны MH средняя линия в ΔABE, так как M середина AE по условию, и $MH \parallel AB$ по построению. Тогда $MH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = NC$ и, следовательно, $MHCN$ параллелограмм. Таким образом, $MN \parallel CH$, а тогда $MN \perp MB$, т.е. $\angle BMN = 90^0$.

6. Ответ 1. Домножим второе равенство на b и запишем его в виде $b = a^3b - 13b^3$. Затем сложим полученное равенство почленно с первым. Получим $a+b = (b^4 + 13b^3) + (a^3b - 13b^3)$, откуда $a+b = b^4 + a^3b$ и $a+b = b(b^3+a^3) = b(a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Так как по условию $a \neq -b$, сократим на $a+b$. Имеем, что $b(a^2 - ab + b^2) = 1$, т.е. $a^2b - ab^2 + b^3 = 1$.

7. Пусть для некоторого числа n числа a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $\dots$, $a_1+a_2+\ldots+a_n$ удовлетворяют условию задачи. Тогда обязательно $a_1=n$. Докажем методом от противного. Предположим, что $a_k=n$, где $1<k\le n$. Тогда числа $a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}$ и $a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+a_k$ дают одинаковый остаток при делении на n. Пришли к противоречию.

а) Если $n=4$. Перестановка 4, 3, 2, 1 удовлетворяет условию задачи, так как числа 4, 7, 9, 10 дают различные остатки при делении на 4.

б) Если $n=5$. Искомая перестановка не существует. Ранее доказано, что $a_1=5$. Но тогда a_1 и $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1+2+3+4+5=15$ дают одинаковый остаток при делении на 5.

в) Если $n=6$. Перестановка 6, 4, 1, 3, 5, 2 удовлетворяет условию задачи, потому что числа 6, 10, 11, 14, 19, 21 дают различные остатки при делении на 6.

Критерии оценки выполнения задания. 4 балла за верные примеры в а) и в). Доказательство невозможности примера в пункте б) оценивается 2 балла. Доказано, что $a_1=n$ при отсутствии результатов по пунктам а), б) и в) оценивается 1-2 балла.