<u>З А Д А Ч И   Д Л Я   7   К Л А С С А</u>

Первые 5 задач оцениваются по 3 балла, задача 6 с открытым ответом оценивается 5 баллами, а задача 7 с подробным решением оценивается 10 баллами.

Время на работу 120 мин.

Задача 1. Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$ такие числа, что $a^3 = -9b^2$. Нааидите значение выражения: $A = [(0{,}15a)^3 \cdot b^6]^4 : \left[-\left(0{,}45b\right)^2 \cdot \dfrac{b^4}{a}\right]^6$.

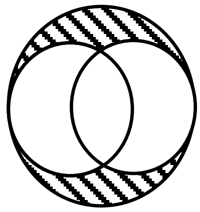
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

Задача 2. Найдите количество натуральных чисел, которые меньше значения выражения:

$$\left[\left(3\frac{1}{2} - 2 : 1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3}\right) \cdot 10 - 6\frac{1}{3}\right] : \left(\frac{3}{4} : 0{,}1\right) - 3{,}5$$

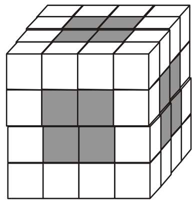
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

Задача 3. Дан круг диаметром 3 см, на котором построены два белых круга одинакового радиуса 1 см, как показано на рисунке. Вычислите, сколько процентов от площади данного круга составляет разница между площадями заштрихованной части и общей части двух белых кругов.



A) $9\frac{3}{5}\%$ **B)** 10% **C)** $10\frac{2}{7}\%$ **D)** $11\frac{1}{9}\%$ **E)** 12%

Задача 4. В кубе $4 \times 4 \times 4$ сделали три сквозных квадратных отверстия размером 2×2 (см. рисунок). Полученную фигуру поместили в ведро с синей краской. Сколько процентов от количества всех оставшихся единичных кубиков составляют кубики с 3 синими гранями?



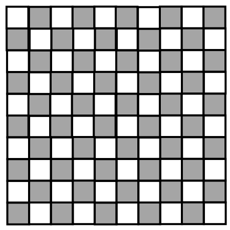
A) 16% **B)** 25% **C)** 32% **D)** 40% **E)** 50%

Задача 5. Сколькими различными способами можно представить число 60 в виде суммы не менее двух последовательных натуральных чисел?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** больше 5

Задача 6. В шахматной партии победителю присуждается 1 очко, проигравшему 0 очков, а при ничье каждый игрок получает 0,5 очка. Участник онлайн-турнира сыграл 32 партии и получил в общей сложности 21 очко. Найдите разницу между числом побед и числом проигрышей этого участника в турнире.

Задача 7. Ладью в шахматах можно перемещать только по горизонтали или вертикали от центра одного поля к центру другого на любое количество клеток. На одном из полей неограниченной шахматной доски поставлена ладья, которую при ходе №1 перемещают горизонтально на соседнее поле, при ходе №2 её перемещают вертикально через одно поле, при ходе № 3 перемещают горизонтально через два поля и т. д. Ладью продолжают перемещать, меняя каждый раз свое направление и увеличивая количество пройденных клеток на одну, пока она не вернется к исходному полю. За какое наименьшее число ходов ладья сможет вернуться на исходное поле? Приведите пример!



<u>ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА</u>

1. Ответ. A). $A=[(0{,}15a)^3\cdot b^6]^4:\left[-(0{,}45b)^2\cdot\dfrac{b^4}{a}\right]^6=$

$$=\left[(0{,}15)^{12}\cdot a^{12}\cdot b^{24}\right]\cdot\frac{a^6}{(0{,}45)^{12}\cdot b^{12}\cdot b^{24}}=\left(\frac{0{,}15}{0{,}45}\right)^{12}\cdot\frac{a^{18}}{b^{12}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{12}\cdot\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^6=\frac{1}{3^{12}}\cdot\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^6.$$

Из условия $\dfrac{a^3}{b^2}=-9$ получим, что $A=\dfrac{1}{3^{12}}\cdot(-9)^6=\dfrac{3^{12}}{3^{12}}=1$

2. Ответ B).

$$\left[\left(3\frac{1}{2}-2:1\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}\right)\cdot 10-6\frac{1}{3}\right]:\left(\frac{3}{4}:0{,}1\right)-3{,}5=$$

$$=\left[\left(\frac{7}{2}-2:\frac{5}{3}+\frac{7}{3}\right)\cdot 10-\frac{19}{3}\right]:\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{10}\right)-3{,}5=$$

$$=\left[\left(\frac{7}{2}-2\cdot\frac{3}{5}+\frac{7}{3}\right)\cdot 10-\frac{19}{3}\right]:\left(\frac{3}{4}\cdot 10\right)-3{,}5=$$

$$=\left[\frac{105-36+70}{30}\cdot 10-\frac{19}{3}\right]:\frac{15}{2}-3{,}5=$$

$$=\left[\frac{139}{30}\cdot 10-\frac{19}{3}\right]\cdot\frac{2}{15}-3{,}5=\left[\frac{139}{3}-\frac{19}{3}\right]\cdot\frac{2}{15}-\frac{35}{10}=$$

$$=\frac{120}{3}\cdot\frac{2}{15}-\frac{35}{10}=\frac{16}{3}-\frac{7}{2}=\frac{32-21}{6}=\frac{11}{6}=1\frac{5}{6}.$$

Среди натуральных чисел только 1 меньше, чем полученное значение выражения.

3. Ответ D). Пусть S_1, S_2 и S соответственно площади в квадратных сантиметрах данного круга, каждого из белых кругов и ощей части белых кругов. Тогда площадь заштрихованной части $S_1-S_2-(S_2-S)=S_1-2S_2+S$, а разность площадей защрихованной части и общей части белых кругов равна $(S_1-2S_2+S)-S=S_1-2S_2$. Значит, искомый процент $\dfrac{S_1-2S_2}{S_1}\cdot 100=\left(1-2\cdot\dfrac{S_2}{S_1}\right)\cdot 100=\left(1-2\cdot\dfrac{\pi}{2{,}25\pi}\right)\cdot 100=\dfrac{100}{9}=11\dfrac{1}{9}\%$.

4. Ответ B). Для того чтобы сделать полученную фигуру, необходимо из исходного куба убрать меньший внутренний куб размером $2\times2\times2$, содержащий 8 единичных кубиков. Также требуется убрать от каждой грани по 4 кубика в центре, т.е. еще $6\cdot4=24$ кубика. Общее количество вынутых кубиков равно 32. Значит, оставшаяся фигура содержит $64-32=32$ кубика. Три окрашенных грани имеют только единичные кубики, которые находились в вершинах большого куба $4\times4\times4$. Их количество равно8, а искомое число процентов $\dfrac{8}{32}\cdot 100=\dfrac{1}{4}\cdot 100=25\%$.

5. Ответ B). Пусть x наименьшее слагаемое в сумме. Рассмотрим несколько случаев:

Первый случай. Два слагаемых. Имеем $x+(x+1)=60$ и $2x=59$. Полученное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Второй случай. Три слагаемых. Имеем $x+(x+1)+(x+2)=60$, откуда $3x=57$, а $x=19$. Получили первое решение.

Третий случай. Четыре слагаемых. Имеем $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=60$, откуда $4x=54$, нет решений.

<u>Четвертый случай</u>. Пять слагаемых. Имеем

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=60,$$

откуда $5x=50$, а $x=10$. Второе решение.

<u>Петый случай</u>. Шесть слагаемых. Имеем

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)=60,$$

откуда $6x=45$, нет решений.

<u>Шестой случай</u>. Семь слагаемых. Имеем

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)=60,$$

откуда $7x=39$, нет решений.

<u>Седьмой случай</u>. Восемь слагаемых. Имеем

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)=60,$$

откуда $8x=32$, $x=4$. Третье решение.

<u>Вольмой случай</u>. Девять слагаемых. Имеем

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)+(x+8)=60,$$

откуда $9x=24$, нет решений.

<u>Девятый случай</u>. Десять слагаемых. Имеем

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)+(x+8)+(x+9)=60,$$

откуда $10x=15$, нет решений.

<u>Десятый случай</u>. Одиннадцать слагаемых. Имеем

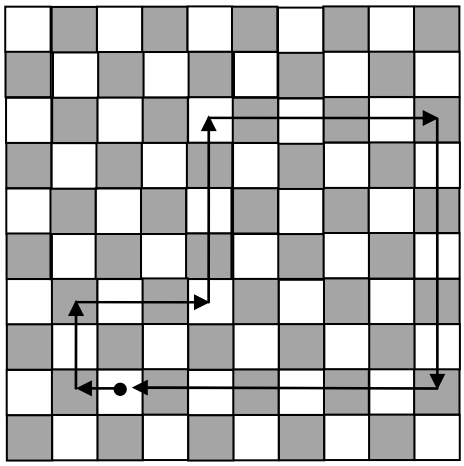
$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)+(x+8)+(x+9)+(x+10)=60,$ откуда $11x=5$, нет решений.

Нет необходимости рассматривать другие случаи, потому что правая часть полученных уравнений становится меньше левой, дополнительных решений больше не будет.

Из решения следует, что искомый ответ - 3.

6. Ответ 10. Пусть x количество побед данного участника в турнире, y число поражений, а z число ничейных партий. Тогда $x+0,5z=21$ и $2x+z=42$. Но $z=32-x-y$ и, следовательно, $2x+32-x-y=42$, откуда $x-y=10$.

7. Ответ 7. На рисунке ладья обозначена черным кругом и показан маршрут, удовлетворяющий условию задачи, содержащий 7 ходов. Покажем, что минимальное количество ходов, необходимое для возвращения на исходное поле равно 7. Если измерять расстояние, пройденное каждым ходом, числом полей от центра до центра, то каждый горизонтальный ход имеет нечетную длину. С другой стороны, каждый горизонтальный ход меняет цвет поля. Следовательно, должно быть четное количество ходов по горизонтали, каждый из которых имеет нечетную длину. Если минимальное количество ходов меньше 7, то единственный вариант ходов по горизонтали – сделать 2 хода длинной 1 и 3 поля соответственно (третий ход длиной 5 уже сделает количество ходов нечетным). Но за 2 хода, очевидно, длина пути по горизонтали вправо не может равняться длине пути по горизонтали влево. Таким образом, общее количество ходов не может быть меньше 7.



Критерии оценки выполнения задания: Указанный верный ответ 7 оценивается 1 баллом. Если ответ сопровождается картинкой – еще 1 балл. Остальные 8 баллов распределяются за правильное доказательство того, что 7 – это минимальное количество ходов. Например, 4 балла добавляются, если доказано, что количество горизонтальных ходов является четным. Из них 2 балла присуждаются за то, что горизонтальный ход меняет цвет поля. Еще 4 балла оценивается утверждение, что длина горизонтальных ходов нечетна.