Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Институт математики, информационных и космических технологий

Студенческая олимпиада по математике

28.03.2015

1. Плоскость раскрашена в 4 цвета (т.е. разбита на четыре непустых множества). Доказать, что существует прямая, содержащая точки не менее чем трёх цветов.

2. Вычислите $\int_1^e \sqrt{\ln x}dx + \int_0^1 e^{x^2} dx$

3. Докажите, что всякий неотрицательный при всех $x \in R$ многочлен 4-й степени с действительными коэффициентами можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов (тоже с действительными коэффициентами).

4. При каких действительных значениях x сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)$.

5. Можно ли разложить многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ в произведение двух многочленов ненулевой степени с целыми коэффициентами?

6. Докажите, что при любом натуральном n число $1 + \left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n\right]$ делится на 2^n (через $[x]$ обозначается целая часть числа x).

7. Найти все функции $f : R \to R$ удовлетворяющие следующему уравнению $f(f(x)) = x^2 - 1$.

8. Указать все натуральные числа n, для которых многочлен $x^n + 1$ неприводим над полем рациональных чисел.

9. Пусть в группе существует единственный элемент втрого порядка. Доказать, что он перестановочен со всеми элементами группы.

10. Пусть ξ_1, ξ_2, …, ξ_n независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметрами λ_1, λ_2, …, λ_n. Какое распределение будет иметь случайная величина $\xi = \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.