

Олимпиада по математике 8-9 класс

28.03.2015

1. Плоскость раскрашена в 4 цвета (т.е. разбита на четыре непустых множества). Доказать, что существует прямая, содержащая точки не менее чем трёх цветов.
2. Доказать, что не существует двух трапеций (отличных от параллелограммов) таких, что боковые стороны каждой из них равны соответственно основаниям другой.
3. Может ли сумма цифр полного квадрата равняться 555?
4. Может ли король, совершая ходы по шахматным правилам, обойти всю доску, сделав при этом не более 13 поворотов? (Король ходит на любую соседнюю клетку. Соседние клетки - это клетки, у которых есть хотя бы одна общая точка.)
5. Найти все натуральные числа x, y, z , удовлетворяющие уравнению
$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{28}{13}.$$
6. Мышка грызет куб с ребром равным 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает кубик она переходит к другому, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика.
7. Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали по одинаковому числу грибов. Доказать, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.
8. Доказать, что если $ab+cd$ делится нацело на $a+c$, то $ad+bc$ делится на $a+c$. (a, b, c, d натуральные числа)
9. Пловец плывет вверх против течения Невы. Возле Республиканского моста он потерял флягу. Проплыв еще 20 минут против течения, он заметил свою потерю и вернулся догонять флягу; догнал ее возле моста Лейтенанта Шмидта. Определить скорость течения Невы, если расстояние между мостами 2 км.
10. Доказать, что если многочлен с целыми коэффициентами в нуле и единице принимает значения равные 1, то у него нет целых корней.