Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Институт математики, информационных и космических технологий

Олимпиада по математике 10-11 класс

28.03.2015

1. Плоскость раскрашена в 4 цвета (т.е. разбита на четыре непустых множества). Доказать, что существует прямая, содержащая точки не менее чем трёх цветов.

2. Доказать, что на окружности, центр которой имеет иррациональные координаты, не существует трех различных точек с рациональными координатами.

3. Найти все натуральные числа x, y, z, удовлетворяющие уравнению $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\dfrac{28}{13}$.

4. Многочлен ax^3+bx^2+cx+d принимает целые значения при $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$. Докажите, что этот многочлен принимает целые значения при всех целых x.

5. Всякую ли пирамиду, в основании которой лежит выпуклый четырехугольник, можно пересечь плоскостью так, что в сечении получится параллелограмм?

6. Доказать, что нет такого числа в последовательности

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \ldots$$

которое является квадратом целого числа.

7. Доказать, что если все коэффициенты произведения двух многочленов с целыми коэффициентами делятся на 7, то коэффициенты одного из сомножителей также делятся на 7.

8. Каждая из клеток таблицы 2015×2015 покрашена в один из двух цветов. За один ход разрешается все клетки любой строки или любого столбца этой таблицы перекрасить в тот цвет, который чаще встречается в этой строке или в этом столбце. Можно ли за несколько ходов закрасить все клетки таблицы в один цвет?

9. Доказать что основания высот и медиан остроугольного треугольника лежат на одной окружности.

10. Докажите, что если a, b, c - длины сторон треугольника, то $\dfrac{1}{4}<\dfrac{ab+bc+ac}{(a+b+c)^2}<\dfrac{1}{3}$.