

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова  
Институт математики, информационных и космических технологий  
**Студенческая олимпиада по математике**  
29.03.2014

1. Средний возраст студентов-заочников одной группы университета равен их количеству. 39-летний студент этой группы забрал документы и покинул университет. После чего средний возраст оставшихся студентов снова равнялся их количеству. Сколько студентов первоначально было в группе?
2. Найти среднее арифметическое длин всех хорд, соединяющих данную точку окружности со всеми остальными точками этой окружности радиуса  $R$ .
3. Доказать неравенство:  $0,5 < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x + e^x} < 1$ .
4. Доказать, что круг нельзя разбить на два равных непересекающихся множества (два множества точек плоскости считаются равными, если они переводятся друг в друга параллельным переносом).
5. Приведите пример двух матриц  $A$  и  $B$  одинакового порядка таких, что пределы  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} B^n$  существуют, а предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} (AB)^n$  не существует.
6. Какую наибольшую площадь может иметь эллипс, вписанный в треугольник со сторонами 3, 4, 5.  
Указание: Известно, что из всех треугольников, описанных вокруг данной окружности, наименьшую площадь имеет правильный треугольник.
7. Как изменится определитель квадратной матрицы  $(a_{ij})$  порядка 2014, если каждый ее элемент  $a_{ij}$  умножить на  $2014^{i-j}$ ?
8. Таблица  $n \times n$  заполнена числами. Оказалось, что сумма чисел в любом «кресте» (объединении некоторой вертикали и некоторой горизонтали) равна нулю. Верно ли, что все числа равны нулю?
9. Обозначим  $p_n$  и  $P_n$  периметры вписанного и описанного правильных  $n$ -угольников в окружность радиуса  $R$ . Доказать, что  $\frac{2}{3} p_n + \frac{1}{3} P_n > 2\pi R$ .
10. Известно, что посетитель чайной с одинаковой вероятностью может заказать черный, зеленый или цветочный чай. Каждый из 10 посетителей чайной независимо от других заказал чашку чая. Какова вероятность того, что в заказах этих посетителей присутствовали все виды чая?