Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова
Институт математики, информационных и космических технологий

Олимпиада по математике 8-9 класс

29.03.2014

1. Средний возраст школьников одного класса равен их количеству. Пятнадцатилетний школьник этого класса уехал на олимпиаду по математике в другой город. После чего средний возраст оставшихся школьников снова равнялся их количеству. Сколько школьников первоначально было в классе?

2. Радиус описанной около треугольника окружности равен 2, а длины всех высот являются целыми числами. Найдите стороны треугольника.

3. Имеется 19 гирек с массами 1, 2, 3, …, 19 г. Девять из них – железные, девять – бронзовые и одна - золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

4. Можно ли представить число $1^2+2^2+3^2+\ldots+2014^2$ в виде суммы квадратов 2013 различных чисел?

5. На скамейке сидят десять школьников, мальчики и девочки. Может ли быть так, что между каждыми двумя мальчиками сидит четное число школьников, а между каждыми двумя девочками – нечетное?

6. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан всех треугольников вписанных в данную окружность.

7. Таблица $n \times n$ заполнена числами. Оказалось, что сумма чисел в любом «кресте» (объединении некоторой вертикали и некоторой горизонтали) равна нулю. Верно ли, что все числа равны нулю?

8. Можно ли на гранях куба расставить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы каждое число являлось делителем суммы своих соседей?

9. Сумма трех неотрицательных чисел x_1, x_2, x_3 не превосходит $1/2$. Докажите, что $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) \geq \frac{1}{2}$.

10. При каком наибольшем n числа от 1 до n можно расположить на окружности так, чтобы сумма любых двух соседних, делилась на третье число по ходу часовой стрелки.