

Олимпиада по математике 10-11 класс

29.03.2014

1. Средний возраст школьников одного класса равен их количеству. Пятнадцатилетний школьник этого класса уехал на олимпиаду по математике в другой город. После чего средний возраст оставшихся школьников снова равнялся их количеству. Сколько школьников первоначально было в классе?
2. Найти все такие функции $y = f(x)$, что $f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y^2 f(y)$ для любых вещественных x и y .
3. При каком наибольшем n числа от 1 до n можно расположить на окружности так, чтобы сумма любых двух соседних, делилась на третье число по ходу часовой стрелки.
4. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан всех треугольников вписанных в данную окружность.
5. В пространстве разбитом на единичные кубики, все вершины которых целочисленные, проведена плоскость $x + y + z = 0$. Найти значения площадей кусков, на которые она разбивается гранями кубиков.
6. Отрезок $[0,1]$ разбивается на n равных частей и в каждой части красится средняя $1/3$ в красный цвет. Затем этот же отрезок разбивается на m равных частей и в синий цвет красится средняя $\frac{1}{3}$ в каждой части. Доказать, что при любых n и m найдется точка окрашенная в оба цвета.
7. Таблица $n \times n$ заполнена числами. Оказалось, что сумма чисел в любом «кресте» (объединении некоторой вертикали и некоторой горизонтали) равна нулю. Верно ли, что все числа равны нулю?
8. В городе n жителей. У любых двух знакомых множество знакомых одно и то же. Доказать, что если не все друг с другом знакомы, то найдется горожанин, у которого незнакомых больше чем знакомых.
9. В гостинице «Nehilton» 3 свободных номера: двухместный, трехместный и четырехместный. Девять человек, среди них трое близнецов, случайным образом расселяются в свободные номера. Какова вероятность того, что только два близнеца будут поселены вместе?
10. Вася задумал многочлен $P(x)$ с натуральными коэффициентами. Петя может спросить у Васи, какое значение принимает многочлен в некоторой натуральной точке. За какое наименьшее число вопросов Петя гарантированно может узнать многочлен, задуманный Васей?