Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Институт математики, информационных и космических технологий

**Студенческая олимпиада по математике**

26.03.2013

1. Машинистка напечатала 10 писем и адреса на 10 конвертах, но рассеянная секретарша разложила эти письма по конвертам, нисколько не заботясь о соответствии между письмом и адресом. Правда в каждый конверт она положила по одному письму. Какова вероятность того, что: а) ровно девять писем попали в предназначенные для них конверты; б) ни одно письмо не попало в свой конверт?

2. Доказать, что существует окружность на координатной плоскости, внутри которой находится ровно точек с целочисленными координатами.

3. Найти остаток от деления на , если .

4. В правильный треугольник вписана окружность. Доказать, что для любой точки на этой окружности .

5. Докажите, что последовательность , , неограничена.

6. Из ряда удалены все члены, знаменатели которых содержат хотя бы одну цифру 7 в десятичной записи. Выяснить, сходится ли ряд из оставшихся членов.

7. Докажите, что: а) у любого тетраэдра, есть по крайней мере одна вершина, все плоские углы при которой острые; б) если в тетраэдре все грани равновелики, то они равны; в) если в тетраэдре периметры всех граней равны, то все грани равны (т.е. тетраэдр правильный).

8. В школе учеников посещают кружок (все кружки разные, т.е. не совпадают по составу учеников). Известно, что любые три кружка имеют общего ученика. Докажите, что найдется ученик, посещающий все эти кружки.

9. Биекция называется симметрией, если (т.е. ). Доказать, что всякая биекция множества является композицией двух симметрий (т.е. для любой биекции существуют симметрии и , что ).

10. Вычислить интеграл .

11. Точка движется по прямой так, что средняя скорость за любой промежуток времени равна среднему арифметическому скоростей в концах этого промежутка. Доказать, что точка движется с постоянным ускорением.

12. Три точки движутся по плоскости с постоянными скоростями. Доказать, что если существуют три момента времени, когда эти точки лежат на одной прямой, то они обладают этим свойством все время.