Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Институт математики, информационных и космических технологий

**Олимпиада по математике 8-9 класс**

26.03.2013

1. Машинистка напечатала 10 писем и адреса на 10 конвертах, но рассеянная секретарша разложила эти письма по конвертам, нисколько не заботясь о соответствии между письмом и адресом. Правда в каждый конверт она положила по одному письму. Какова вероятность того, что ровно девять писем попали в предназначенные для них конверты?

2. Два миллиона отмеченных точек целиком расположены внутри окружности радиусом 1 см. Существует ли прямая, по каждую сторону от которой находилось бы ровно по одному миллиону точек?

3. Докажите, что если у обычной перетасованной колоды карт среди верхних 18 карт находится больше красных карт, чем черных среди нижних 18 карт, то в этой колоде по крайней мере три карты одного цвета идут подряд.

4. Гриб называется плохим, если в нем больше 11 червяков. Червяк – тощий, если он съел не более ${1}/{5}$ гриба, в котором живет. Четверть всех грибов в лесу плохие. Докажите, что не менее трети всех червяков тощие.

5. В ряд выписаны числа: $1^{2}$, $2^{2}$, …, $2013^{2}$. Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «-» и находят сумму. Может ли такая сумма равняться 2013?

6. Периметр прямоугольного треугольника $ABC$ ($∠C=90^{∘}$) 72 см, а медиана $CM$ на 7 см длиннее высоты $CK$. Найдите длину гипотенузы $AB$.

7. Две биссектрисы треугольника пересекаются под углом $60^{∘}$. Докажите, что один из углов этого треугольника равен $60^{∘}$.

8. Лидер общественного движения «Алгебролюбы» предложил новую операцию $m⨂n=\frac{m+n}{mn+4}$. Чему тогда равно значение выражения: $\left(\left(\cdots \left(\left(2013⨂2012\right)⨂2011\right)⨂\cdots \right)⨂2\right)⨂1$?

9. Мальчик пошел с отцом в тир. Отец купил ему 10 пулек. В дальнейшем отец за каждый промах отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную пульку. Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

10. Различные вещественные числа $a$, $b$ и $c$ таковы, что $a=ab+c$, $b=bc+a$, $c=ca+b$. Найдите $a+b+c$.

11. На складе имеется по 200 сапог 41, 42 и 43 размеров, причем среди этих 600 сапог 300 левых и 300 правых. Докажите, что из них можно составить не менее 100 годных пар обуви.

12. В школе $n$ учеников посещают $2^{n-1}$ кружок (все кружки разные, т.е. не совпадают по составу учеников). Известно, что любые три кружка имеют общего ученика. Докажите, что найдется ученик, посещающий все эти кружки.