

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова  
Институт математики и компьютерных наук  
Студенческая олимпиада по математике  
21.04.2012

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13, а высота из вершины прямого угла 7. Найти сумму катетов.
2. Нетрезвый гражданин ползает по ребрам куба  $AB_1C_1D_1$ . Из любой вершины он ползет по одному из ребер, выходящему из этой вершины, с вероятностью  $1/3$ . Выползает он из вершины  $A$ ; вершины  $B_1$  и  $C_1$  суть вырезатели, попав в которые гражданин больше уже никуда не ползет. С какой вероятностью он попадет в вырезатель  $B_1$ ? А в вырезатель  $C_1$ ? С какой вероятностью он вообще не попадет в вырезатель?
3. Пришла весна. Четверо друзей – Костя, Вадим, Слава и Марат – влюбились в девушек (в различных!) и решили, что каждый подарит своей избраннице букет цветов. Разведка доложила, какие цветы нравятся девушкам, и ребята заказали четыре букета – розы, ирисы, хризантемы, лилии. Да вот незадача, забыли, кто с чем должен идти. Помогите ребятам не опозориться перед прекрасными дамами и не опоздать на свидание, если они вспомнили следующие факты. Таня любит ирисы. Вадим любит Олю. Марат точно помнит, что он должен подарить лилии. Настя не любит хризантемы, а Люда не любит розы. Костя идет на свидание не с Настей, и она не встречается с Маратом.
4. Доказать, что у всех прямоугольников описанных вокруг данного эллипса диагонали имеют одинаковую длину.
5. Вычислить интеграл  $\int_0^{2012} x(x-4)(x-8)\dots(x-2012)dx$
6. Пусть  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) - последовательные положительные корни уравнения  $\operatorname{tg} x = x$ . Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-2}$ .
7. Пусть  $f(x)$  непрерывна на всей оси. Доказать, что уравнение  $f(f(x)) = x$  имеет решение, тогда и только тогда, когда уравнение  $f(x) = x$  имеет решение.
8. Докажите, что среднее арифметическое корней многочлена равно среднему арифметическому корней его производной.
9. Квадратная матрица такова, что в каждом столбце есть ровно два ненулевых элемента: диагональный, который больше 1, и недиагональный, равный 1. Может ли эта матрица быть вырожденной?
10. На плоскости даны три красных и три синих точки. Доказать, что сумма отрезков, соединяющих одноцветные точки, не превосходит суммы отрезков, соединяющих разноцветные точки.