Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова
Институт математики и компьютерных наук

Олимпиада по математике 10-11 класс

21.04.2012

1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13, а высота из вершины прямого угла 7. Найти сумму катетов.

2. В классе 37 человек. Никакие две девочки не дружат с одинаковым количеством мальчиков. Какое наибольшее количество девочек может быть в классе?

3. Пришла весна. Четверо друзей – Костя, Вадим, Слава и Марат – влюбились в девушек (в различных!) и решили, что каждый подарит своей избраннице букет цветов. Разведка доложила, какие цветы нравятся девушкам, и ребята заказали четыре букета – розы, ирисы, хризантемы, лилии. Да вот незадача, забыли, кто с чем должен идти. Помогите ребятам не опозориться перед прекрасными дамами и не опоздать на свидание, если они вспомнили следующие факты. Таня любит ирисы. Вадим любит Олю. Марат точно помнит, что он должен подарить лилии. Настя не любит хризантемы, а Люда не любит розы. Костя идет на свидание не с Настей, и она не встречается с Маратом.

4. Может ли сумма $1+2+3+\dots+p$ при каком-либо p оканчиваться на 2012?

5. Треугольник изготовлен из однородной проволоки. Доказать, что если его центр тяжести совпадает с точкой пересечения медиан, то треугольник правильный.

6. Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трехзначных чисел или не представимых?

7. N первоклассников выстроены в одну шеренгу (плечом к плечу). По команде «нале-Во» все одновременно повернулись на 90°, некоторые – налево, а другие – направо. Ровно через секунду, кто стал лицом к лицу со своим соседом , поворачивается «кругом» - на 180°. Еще через секунду каждый, оказавшийся теперь лицом к лицу с соседом, снова поворачивается на 180° и т.д.

а) Докажите, что через конечное время движение прекратится.

б) Какое наибольшее число раз мог повернуться «кругом» один человек?

в) Какое наибольшее количество времени могло продолжаться движение в строю?

8. В девятиугольной пирамиде все ребра и диагонали основания окрашены: некоторые в красный цвет, остальные в синий. Доказать, что существуют три вершины пирамиды такие, что все отрезки их соединяющие, покрашены в одинаковый цвет.

9. Для любого ли действительного числа $x \geq 1$ верно равенство $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$, где $[\square]$ - целая часть числа.

10. На плоскости даны три красных и три синих точки. Доказать, что сумма отрезков, соединяющих одноцветные точки, не превосходит суммы отрезков, соединяющих разноцветные точки.