Институт математики, информационных и космических технологий
Кафедра экспериментальной математики и информатизации образования

Методика работы с исследовательской сюжетной задачей на занятии кружка «Экспериментальная математика»

Павлова Мария Александровна – руководитель кружка
для учащихся 7-9 классов «Экспериментальная математика»

Зарождение идеи исследовательского обучения

- экспериментальный метод

обучения (М.В. Ломоносов)

середина 18 века.

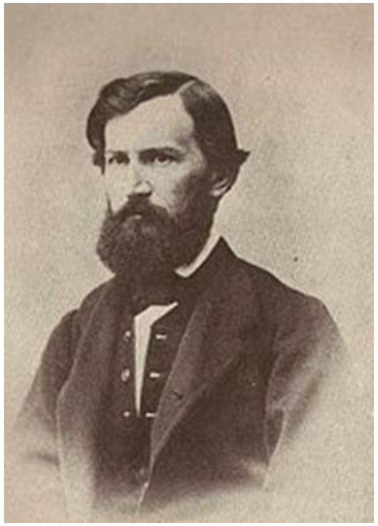
- Начинать изучение нового с обращения к житейскому опыту;

- Ставить демонстрационные эксперименты, чтобы сделать истинность научных положений наглядной;

- Давать учащимся творческие задачи на самостоятельное придумывание и проведение эксперимента.

Распространение идеи

- **К.Д. Ушинский,** 1864 г. в главе «О первоначальном обучении счету» книги «Родное слово» рекомендовал: «Пусть они меряют, весят и считают»;
- **С.И. Шохор-Троцкий,** 1886 в «Методике начального курса математики» пишет: «…в настоящее время надо стремиться к тому, чтобы мето́да поставила учащегося в такие условия, при которых он мог бы быть не только свидетелем, но, по возможности, активным участником этого изобретения».



Исследовательское обучение в XIX веке

- Под исследовательским обучением математике понималось обучение посредством экспериментов

  и конкретно-индуктивных рассуждений;
- **Формы работы:** демонстрационные и лабораторные эксперименты, измерения на местности.

Формирование идеи

начало XX века

- включение в содержание общего математического образования на старшей ступени наиболее распространенных эвристик математического творчества с целью развития философского мышления учащихся, пробуждения их интереса к изучению и развитию математики

(из резолюции 1 съезда учителей математики)

Введение определения

Б.Е. Райков

Исследовательский метод - метод умозаключения от конкретных фактов, самостоятельно наблюдаемых и изучаемых школьниками.

Этапы применения метода

1) наблюдение и постановка вопросов;
2) построение предположительных решений;
3) исследование предположительных решений и выбор одного из них как наиболее вероятного;
4) проверка гипотезы и окончательное ее утверждение.

Возрождение идеи

60-70-е годы XX века

Теория проблемного обучения

(Матюшкин М.А., Махмутов М.И).

В основе принцип активности

и самостоятельности обучения.

Методы обучения:

- проблемного изложения;
- эвристическая беседа;
- частично-поисковый;
- **исследовательский**.

Становление идеи
в начале XXI века

- В 2002 г. разработана «Концепция развития исследовательской деятельности учащихся»

 (А.В. Леонтович,

 А.И. Савенков и др.)

Исследовательская деятельность учащихся

- **главной целью** исследовательской деятельности учащихся является не получение объективно нового знания, а овладение соответствующим способом освоения действительности;

- исследовательская деятельность учащихся является упрощенной моделью научного исследования, в которой сохраняются формально все основные этапы научно-исследовательской деятельности, используются адекватные целям исследования научные методы.

Кружок «Экспериментальная математика»

для учащихся 7-9 классов

Цель - развитие познавательного интереса учащихся к изучению математики, их творческих способностей и исследовательских умений за счет вовлечения их в деятельность постановки и решения задач средствами и методами, характерными для области экспериментальной математики.

Программа рассчитана на 40 учебных часов. Из них 34 часа на проведение занятий в игровой форме + 6 часов на научно-популярные лекции профессоров.	
Задача 1 – «Пираты карибского моря»	2
Задача 2 – «Спасение с необитаемого острова»	4
Задача 3 – «В погоню за приключениями»	4
Научно-популярная лекция: «Компьютерная помощь в решении задач» (Ястребов Александр Васильевич)	2
Задача 4 – «Непослушный котёнок»	4
Задача 5 – «Приключения Буратино»	2
Задача 6 – «Зеркальная комната»	2
Задача 7 – «Открытие новой звезды»	2
Задача 8 – «Находка археологов»	2
Задача 9 – «Параллельный мир»	2
Задача 10 – «Блуждающая переменная»	2
Научно-популярная лекция: «Может ли компьютер генерировать задачи?» (Гроздев Сава)	2
Задача 11 – «Экспериментальные открытия» (теоремы Морлея, Паскаля, Понселе, Плометея и др.)	4
Задача 12 – «Стрела задач»	2
Задача 13 – «Игры с инверсией»	2
Научно-популярная лекция: «Зачем математику компьютер?» (Лазаров Борислав)	2

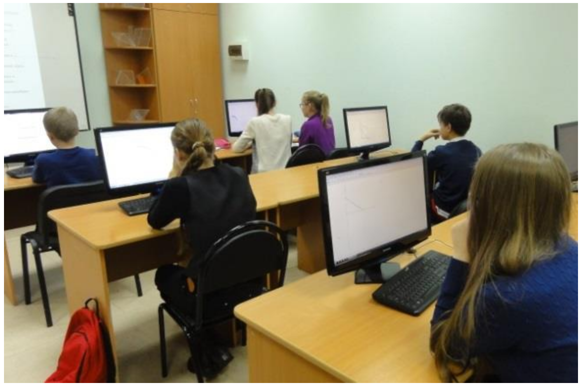
Принципы

- Принцип занимательности.
- Принцип комплексного использования возможностей игровой, исследовательской и учебной деятельности.
- Принцип рационального сочетания экспериментальных и теоретических методов.
- Принцип успешности всех учащихся в решении исследовательских задач.
- Принцип самостоятельности и завершенности исследовательского и игрового цикла на каждом занятии.

Методика работы с исследовательской задачей

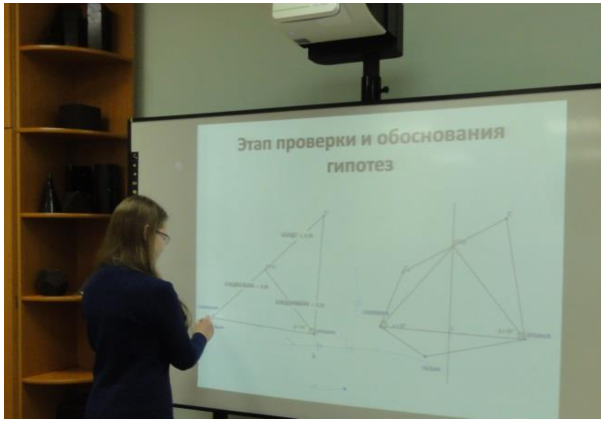
1. **Постановка исследовательской задачи** (инсценировка, моделирование ситуации, попытки опытно-практического решения, формулировка математической задачи).

2. **Докомпьютерное решение задачи** (поиск идеи решения исследованием частных случаев).



3. **Компьютерное исследование** (построение динамической модели, проведение разведочных и контрольных экспериментов).

4. **Послекомпьютерное решение задачи** (обоснование экспериментально установленных фактов).



5. **Определение направлений дальнейшего исследования** (построение «стрелы» исследовательских задач).

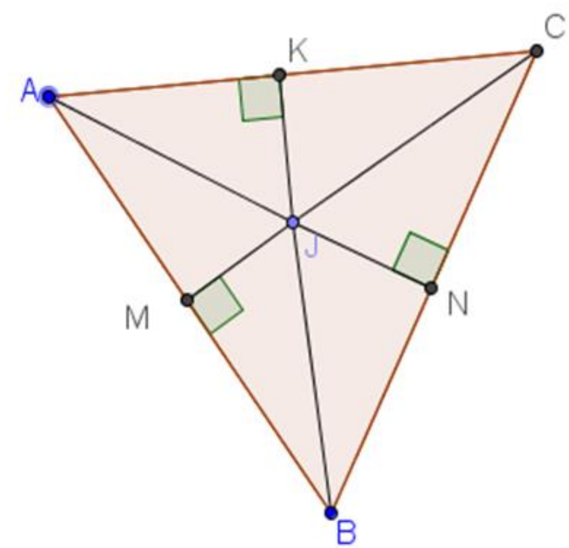
Пример реализации методики работы с исследовательской сюжетной задачей

«На необитаемый остров, имеющий форму правильного треугольника, каждая сторона которого представляет собой пляж, попали двое. Питер хочет построить хижину так, чтобы суммарное расстояние до всех трёх пляжей было минимально. Майкл проводит всё время на мысах (в вершинах треугольника) в ожидании спасительного корабля.

Он хочет построить хижину так, чтобы суммарное расстояние до мысов было минимально. Где каждому из них нужно построить хижины?»

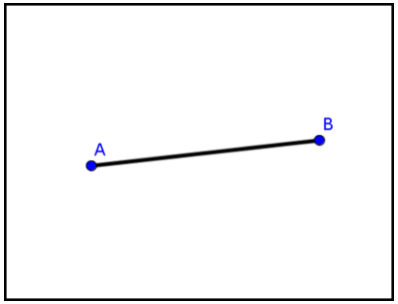
1 этап - постановка исследовательской задачи

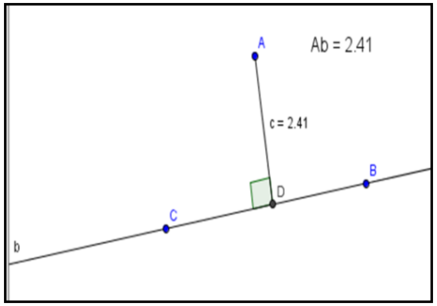
Перевод сюжетной задачи
на математический язык:
«Найти ГМТ, сумма расстояний от которых
до сторон (вершин) правильного треугольника наименьшая»

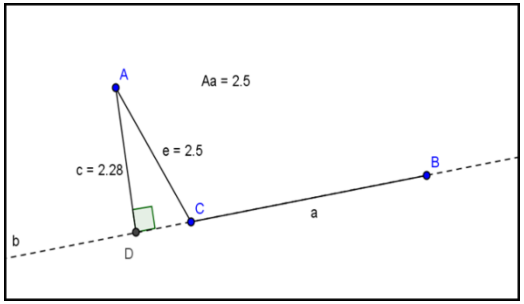


2 этап - докомпьютерное решение задачи

Учебная деятельность:
1) повторение определений
(расстояний от точки до точки,
от точки до прямой),
обсуждение нового для них понятия
«расстояние от точки до отрезка».
2) выполнение построений циркулем и
линейкой на бумаге, выдвижение гипотез.



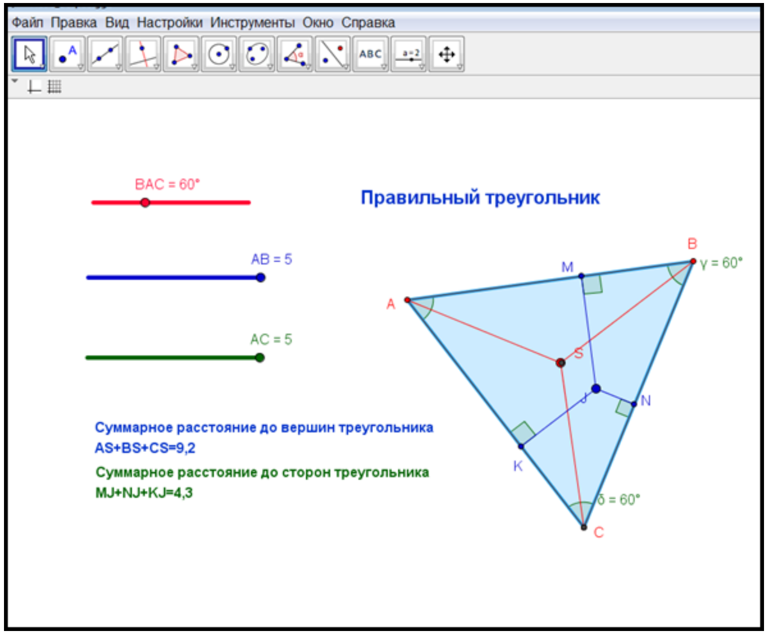




3 этап - компьютерное исследование

1. Построение динамической модели.
2. Компьютерный эксперимент.
3. Выводы с опорой

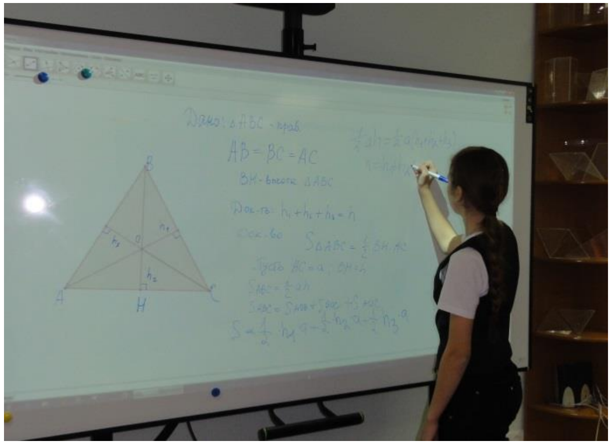
на экспериментальные данные.



Компьютерный эксперимент показал, что ГМТ, сумма расстояний от которых до сторон треугольника, постоянно в любой точке треугольника.

4 этап - послекомпьютерное решение

- поиск способа доказательства выдвинутых гипотез



ГМТ, сумма расстояний от которых до сторон в правильном треугольнике минимальна, Постоянно в любой точке треугольника.

Доказательство:

Рассмотрим треугольник ABC,
пусть сторона его будет а, высота h,
тогда его площадь S=1/2ah.
В тоже время площадь треугольника ABC равна сумме треугольников AJB, AJC, BJC:

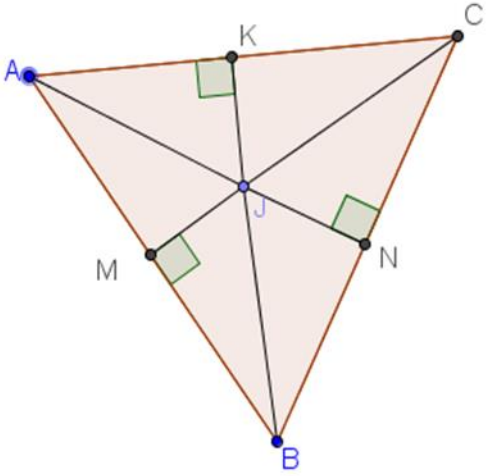
- $S_{ABC}=S_{AJB} + S_{AJC} + S_{BJC}$

Получаем $1/2ah=1/2ah_1+ 1/2ah_2+1/2ah_3$

Вынесем 1/2а за скобку $1/2ah=1/2a(h_1+ h_2+h_3)$

Так как а - не равно нулю, разделим обе части выражения на 1/2а,

- получаем $h=h_1+ h_2+h_3$
- Из чего следует, что суммарное расстояние до сторон правильного треугольника постоянно и равно его высоте.



4 этап - послекомпьютерное решение

ГМТ, сумма расстояний от которых до вершин в правильном треугольнике минимальна, находится в точке пересечения медиан (высот, биссектрис).

Доказательство результатов эксперимента:

1)Возьмем точку X отличную от E. Через точки A,B,C проведем перпендикулярные прямые к AE, BE и CE => равносторонний треугольник MKN.

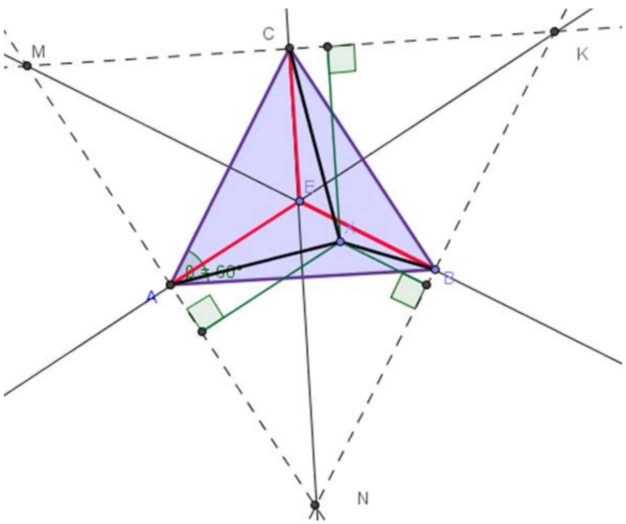
2)Проведем через X перпендикуляры к MK,NK,MN.

3)Сумма расстояния от точки X к сторонам треугольника MKN постоянна и равна AE+BE+CE => AX+BX+CX≥AE+BE+CE

4)Равенство выполняется только тогда, когда основания перпендикуляров опущенных из X совпадают с точками A,B,C.

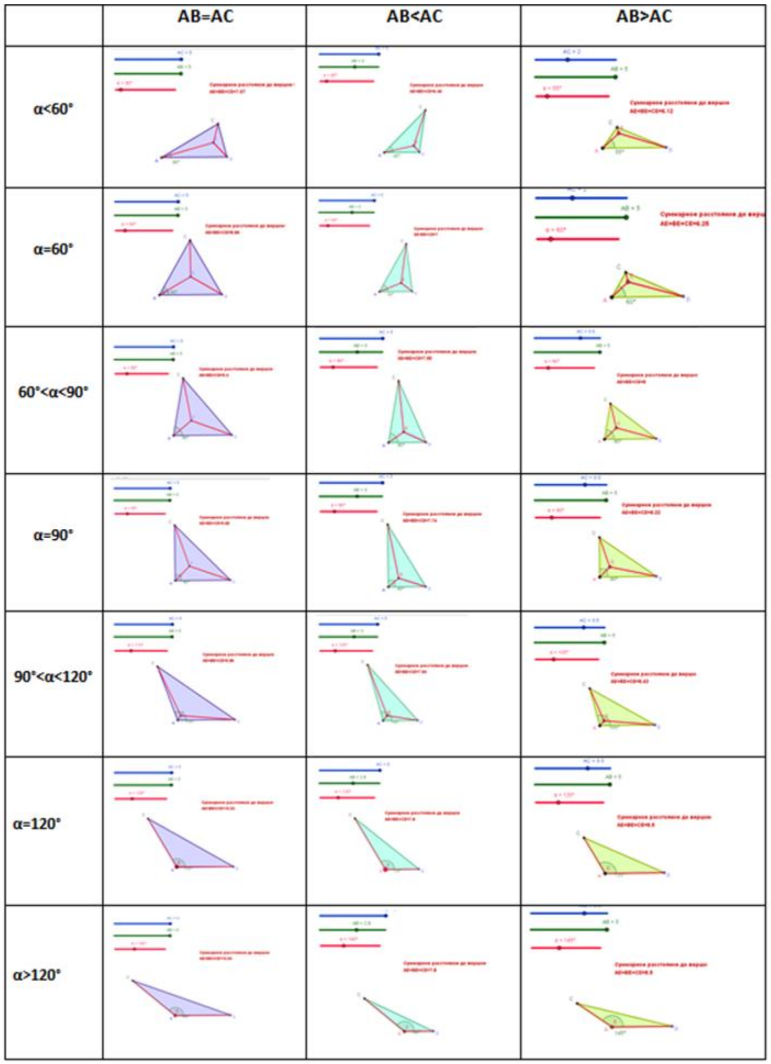
Из чего следует то, что X это E.

Что и требовалось доказать.

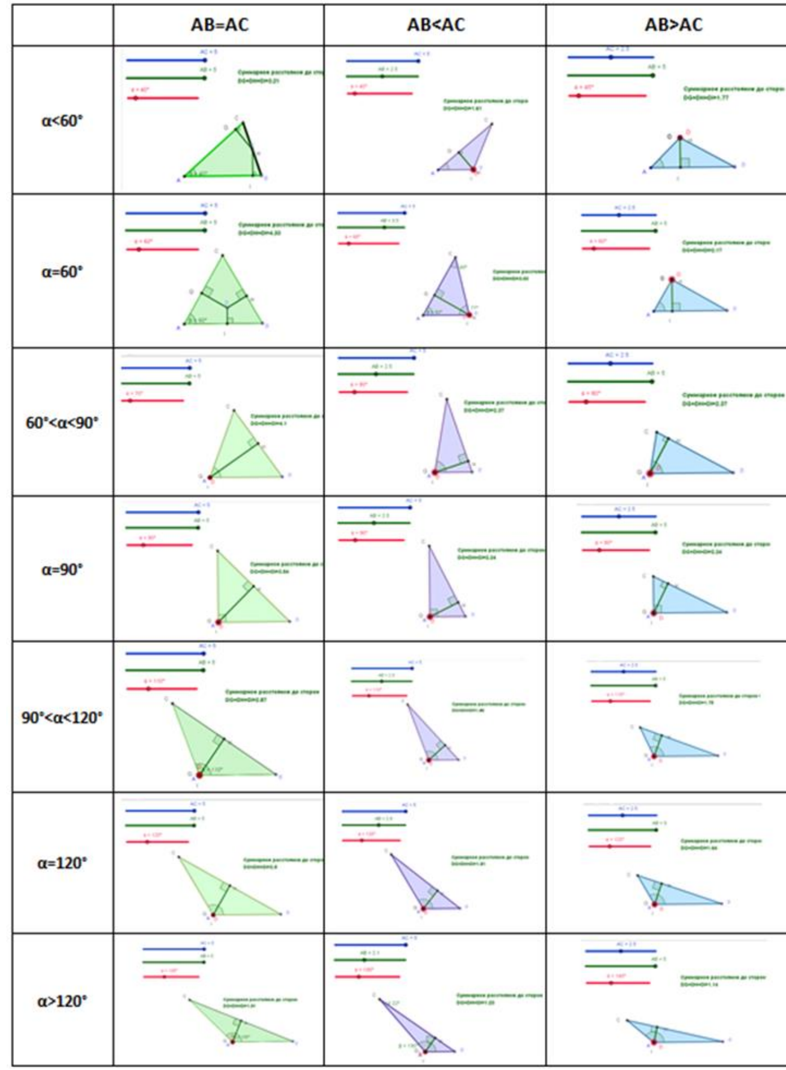


5 этап - построение «стрелы задач»

Исследование зависимости ГМТ от формы треугольника

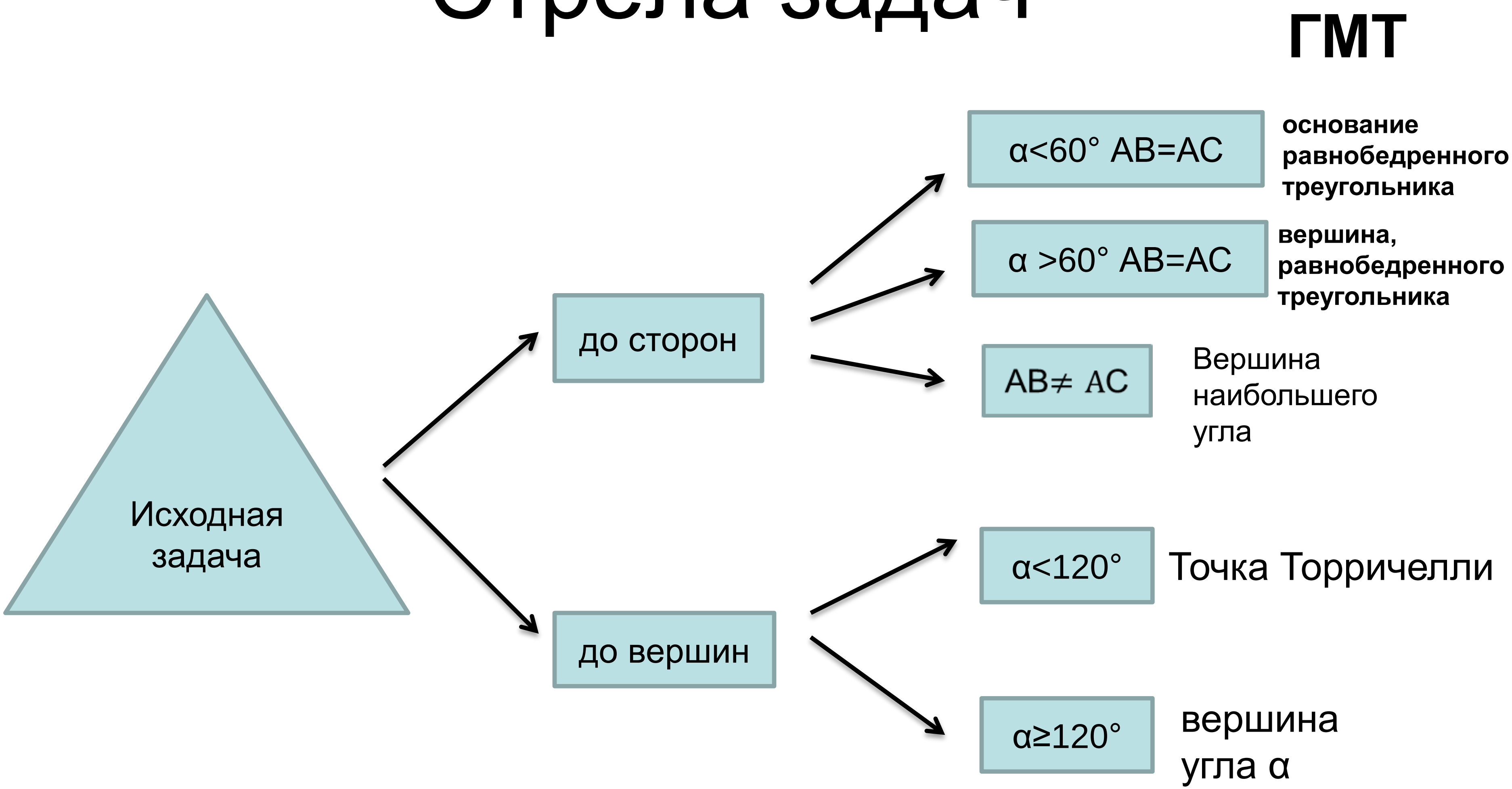


«до вершин»



«до сторон»

Стрела задач



Формулировки 5 новых задач

- Найти ГМТ, сумма расстояний от которых **до сторон** равнобедренного треугольника минимальна, если угол между равными сторонами **меньше 60°.**
- Найти ГМТ, сумма расстояний от которых **до сторон** равнобедренного треугольника ABC минимальна, если угол между равными сторонами **больше 60°.**
- Найти ГМТ, сумма расстояний от которых до сторон разностороннего треугольника ABC минимальна, если AB – наибольшая его сторона.
- Найти ГМТ, сумма расстояний от которых **до вершин** остроугольного треугольника минимальна.
- Найти ГМТ, сумма расстояний от которых **до вершин** тупоугольного треугольника минимальна.

Номинация

«Геометрические миниатюры»

От исследовательского сюжета к стреле задач

Работу выполнила ученица 8 класса

Дроздова Анна Владиславовна – *Drozdova Anna Vladislavovna*

163001 г. Архангельск, пр. Обводный канал, д. 72, кв. 62

телефон: +79115715965; e-mail: drozdovaanya2000@mail.ru;

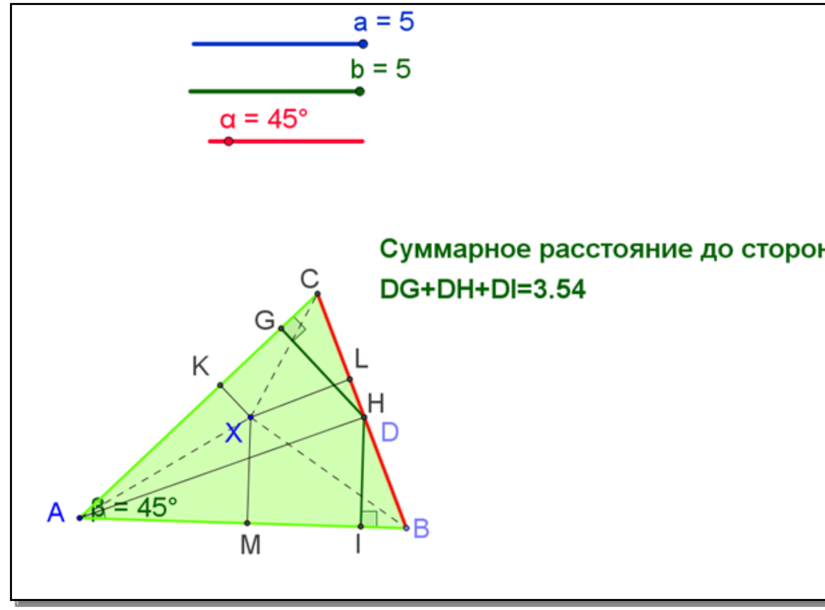
Руководитель работы:

Павлова Мария Александровна – *Pavlova Maria Aleksandrovna*

Руководитель кружка «Экспериментальная математика» для 7-9 классов,
аспирант кафедры экспериментальной математики и информатизации
образования САФУ, телефон: +79539380846, e-mail: maria070583@mail.ru.

РЕШЕНИЕ 1 ЗАДАЧИ

Найти ГМТ, сумма расстояний от которых до сторон равнобедренного треугольника минимальна, если угол между равными сторонами меньше 60°.



Пусть точка X отличная от D. KX,LX,MX – расстояния от точки X до сторон треугольника AC, CB и AB соответственно.

Обозначим расстояния KX,LX,MX как d_1, d_2 , d_3.

Нам нужно найти минимум суммы трех переменных: $d_1 + d_2 + d_3$. Уменьшим количество переменных:

$S_{ABC}=S_{ACX} + S_{AXB} + S_{XCB} = =1/2d_1*AC+1/2d_2*CB+1/2d_3*AB$,

Отсюда $d_1+ d_3=2S_{ABC}/AC – (BC/AC)*d_2$.

Тогда $d_1 +d_2 + d_3 = d_2 + 2S_{ABC}/AC – (BC/AC)*d_2=$
$= 2S_{ABC}/AC +(1- (BC/AC))*d_2$.

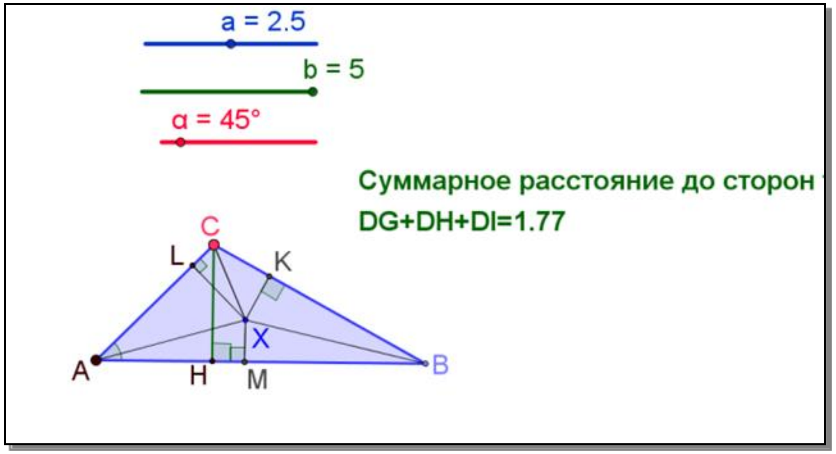
Так как при β<60˚ BC<AC, следовательно, 1- (BC/AC)>0. В этом случае для того, чтобы $d_1 +d_2 + d_3$ была минимальной необходимо, чтобы $d_2=0$. То есть точка X лежит на BC. Докажем, что сумма расстояний от любой точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки. Пусть H – произвольная точка на основании CB равнобедренного треугольника ABC (AC=AB). HG и HI – перпендикуляры, проведенные из точки H к прямым AC и AB.

$S_{ABC}=S_{ACH}+S_{AHB}=1/2AC*HG+1/2AB*HI=1/2AB*(HG+HI)$

Отсюда следует, что $HG+HI = 2S_{ABC}/AB$, то есть сумма HG+HI не зависит от выбора точки H. **Решение 2 задачи аналогично.**

Решение 3 задачи

**Найти ГМТ, сумма расстояний
от которых до сторон разностороннего
треугольника АВС минимальна,
если АВ – наибольшая его сторона**



Пусть точка X лежит внутри треугольника ABC. Обозначим расстояния от точки X до сторон треугольника AC, CB и AB как d_1, d_2 , d_3 соответственно.

Нам нужно найти минимум суммы трех переменных: $d_1 + d_2 + d_3$.

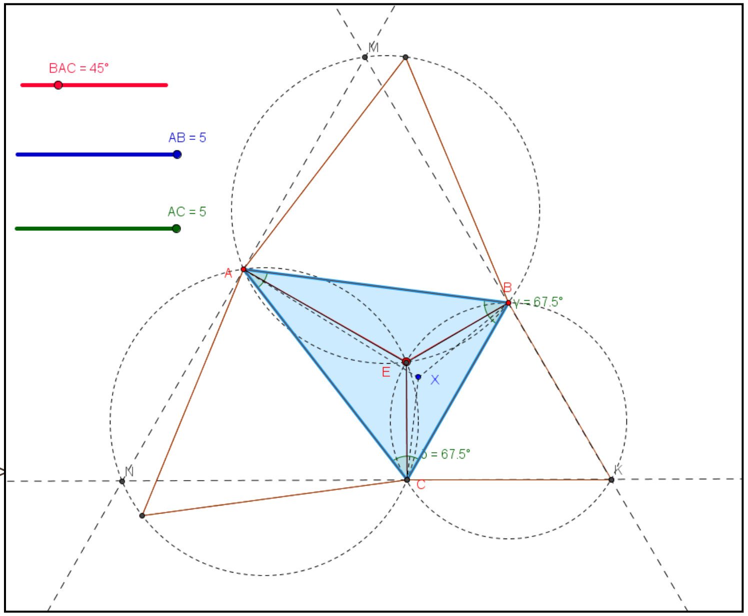
$S_{ABC} = 0{,}5 \cdot AB \cdot CH$, где CH – высота из вершины C.

$S_{ABC} = 0{,}5 \cdot AB \cdot d_3 + 0{,}5 \cdot AC \cdot d_1 + 0{,}5 \cdot CB \cdot d_2$.

Отсюда: $d_1 + d_2 + d_3 = d_1 \cdot (1 - (AC/AB)) + d_2 \cdot (1 - (CB/AB)) + CH$

Так как AB - наибольшая, то все отношения меньше единицы и все выражения в скобках положительны. Следовательно, для уменьшения значения суммы нужно уменьшать значения d_1 и d_2. Наименьшее значение суммы, таким образом, равно CH.

РЕШЕНИЕ 4 ЗАДАЧИ



Найти ГМТ, сумма расстояний от которых до вершин остроугольного треугольника минимальна.

Доказательство:

1)Возьмем точку X отличную от E. Через точки A,B,C проведем перпендикулярные прямые к AE, BE и CE => равносторонний треугольник MKN.

2)Проведем через X перпендикуляры к MK,NK,MN.

3)Сумма расстояния от точки X к сторонам треугольника MKN постоянна и равна AE+BE+CE => AX+BX+CX≥AE+BE+CE

4)Равенство выполняется только тогда, когда основания перпендикуляров, опущенных из X совпадают с точками A,B,C.

Из чего следует то, что X это E.

Что и требовалось доказать.

Решение 5 задачи

Найти ГМТ, сумма расстояний от которых до вершин тупоугольного треугольника минимальна.

- ГМТ – точка А. Минимальное суммарное расстояние AC+AB.
- Рассмотрим рисунок 3.
- Пусть точки К и Р – проекции точки X на AB и АС. Нужно доказать, что для любой точки X, отличной от точки А, будет выполняться неравенство:
- $AC+AB<AX+BX+CX$
- Если точка А находится между С и Р, то
- $CX>CP>AC$
- $AX+BX\geq AB$ (по неравенству треугольника).
- Складываем эти неравенства, получаем:
- $AX+BX+CX>AC+AB$
- Что и требовалось доказать.
- Аналогично доказывается случай, если находится между К и В (рис. 4).

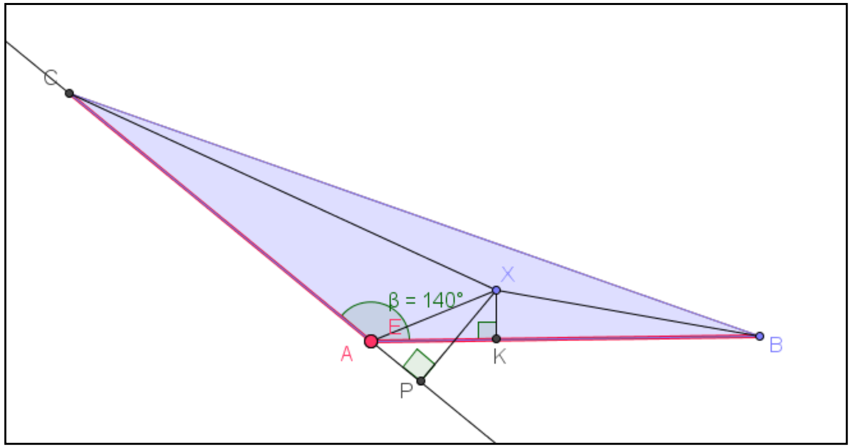


Рисунок 3

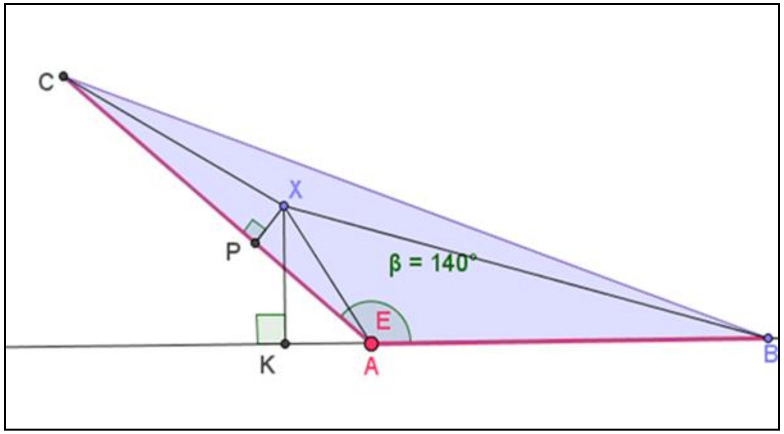


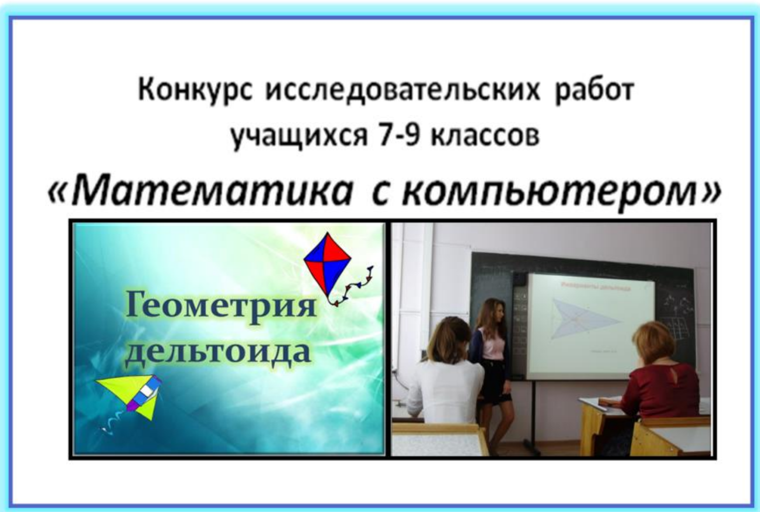
Рисунок 4

Образовательные результаты

1. Базовые исследовательские умения.

2. Формирование навыков работы с интерактивной геометрической средой GeoGebra.

3. Расширение математического кругозора учащихся.



Спасибо за внимание!