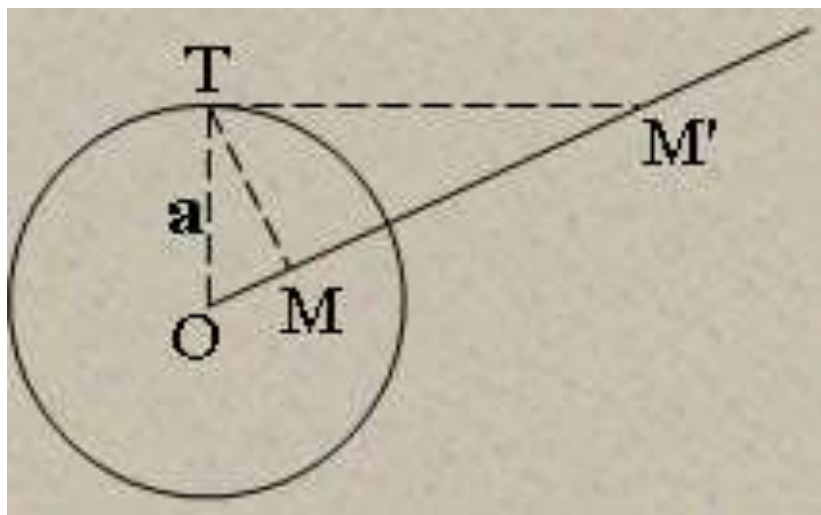


Решение исследовательских задач на инверсию

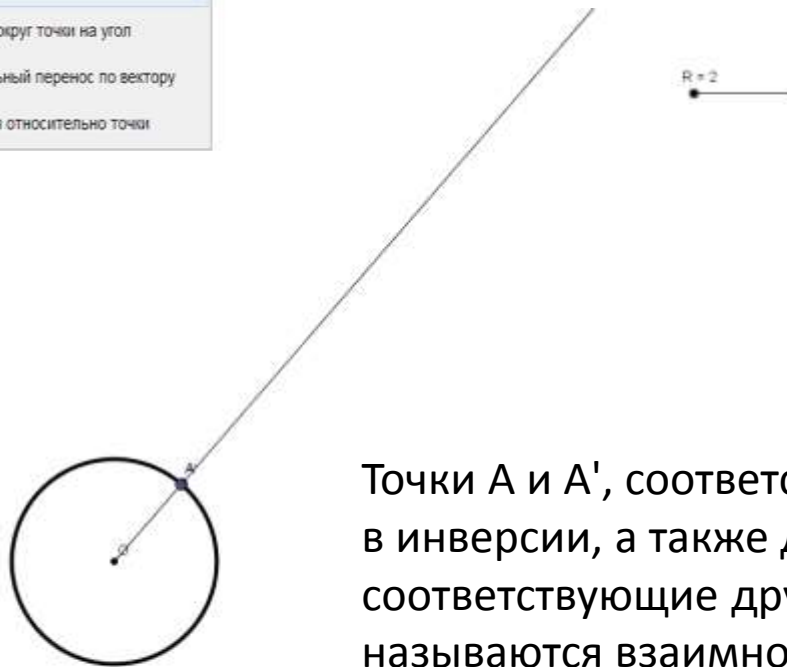
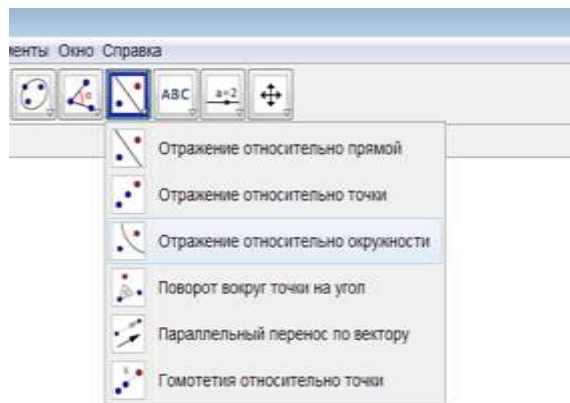
Инверсия

Пусть в плоскости дана окружность с центром в точке O радиуса a . Точечное преобразование плоскости самой в себя, при котором каждой точке M ставится в соответствие точка M' , лежащая на луче OM и удовлетворяющая условию $OM \cdot OM' = a^2$, называется **инверсией** относительно данной окружности.



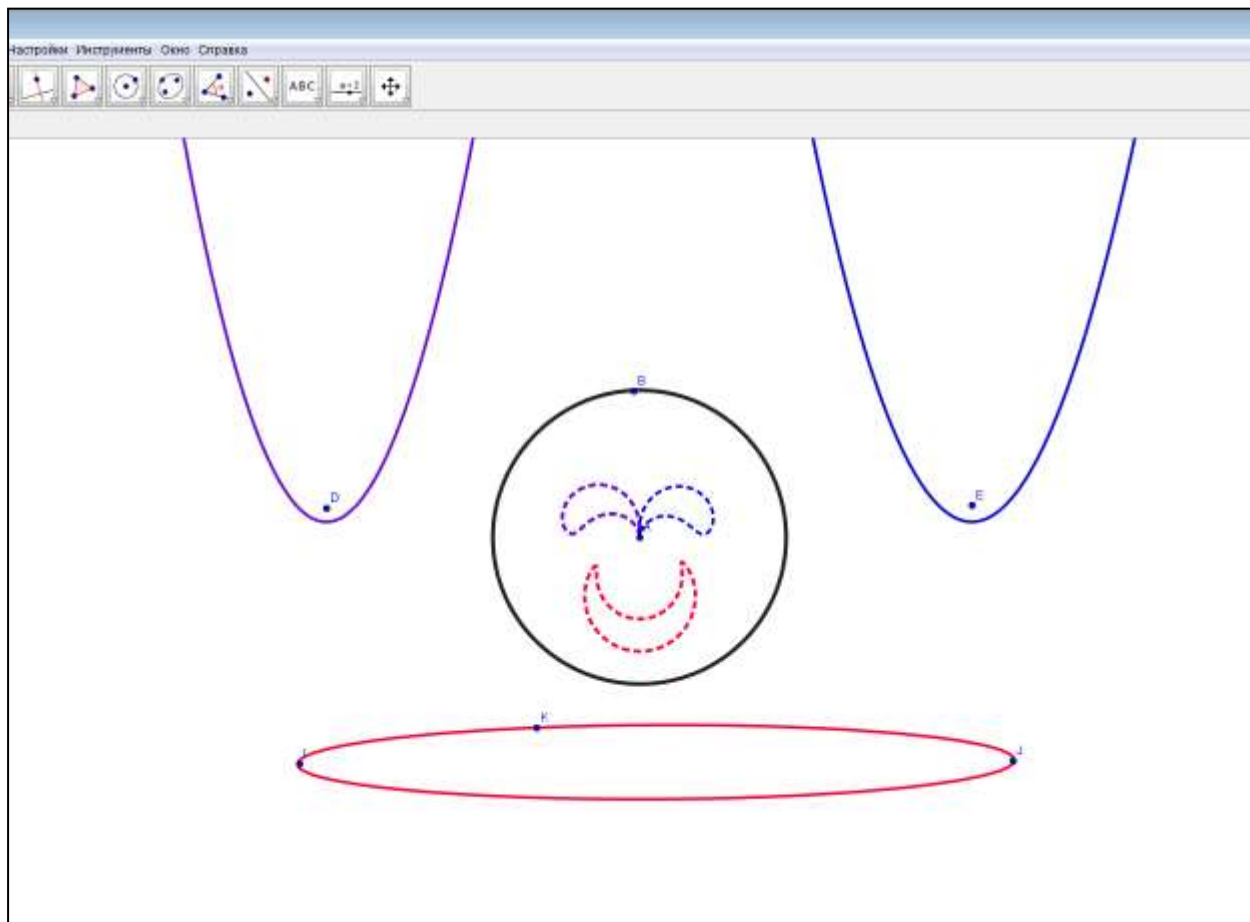
Эта окружность называется **основной окружностью** или окружностью инверсии, её центр O называется **центром инверсии**, её радиус – **радиусом инверсии**, а квадрат радиуса a^2 – **степенью инверсии**.

GeoGebra



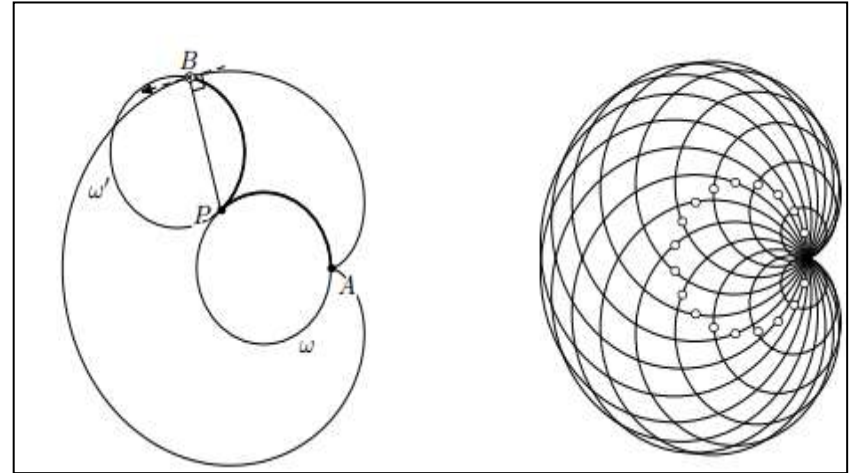
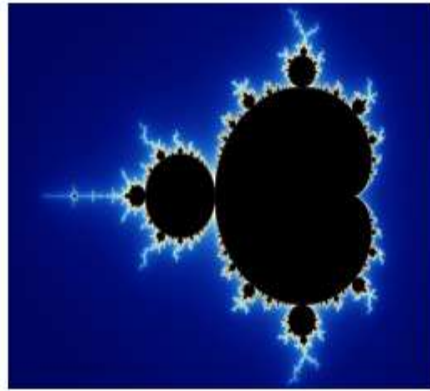
Точки A и A', соответствующие друг другу в инверсии, а также две фигуры, соответствующие друг другу в инверсии, называются взаимно обратными относительно основной окружности.

Инверсии фигур



Интересный факт

кардиоида



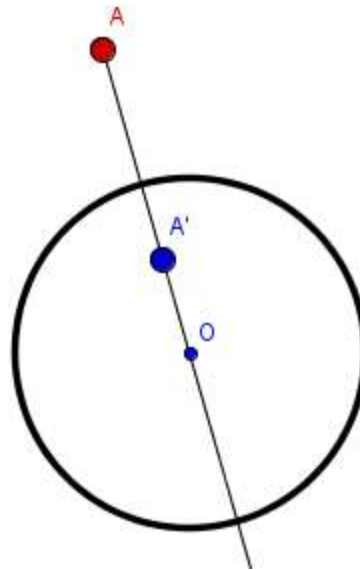
Название происходит от греческого **«кардио»**, что переводится как «сердце». Эта фигура обладает множеством интересных свойств.

1. Кардиоида касается всех окружностей с центрами P на окружности ω и радиуса $PB = PA$. То есть, кардиоида будет огибающей этого семейства окружностей.

2. Парабола есть **инверсный образ** кардиоиды.

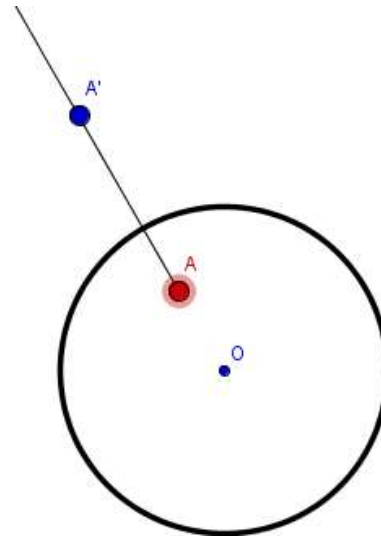
Свойства инверсии

- 1. Внутренние точки окружности инверсии преобразуются во внешние и наоборот; точки самой окружности инверсии остаются неподвижными, то есть преобразуются сами в себя.



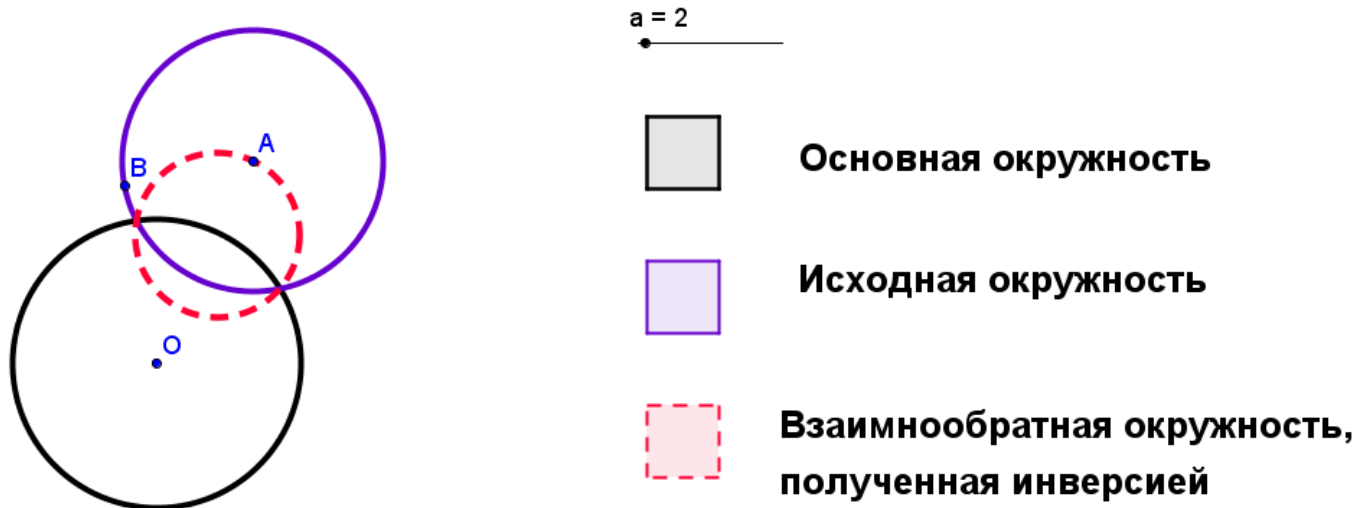
Свойства инверсии

- 2. Преобразование, обратное для данной инверсии, есть также инверсия, то есть если точка A переходит при инверсии в точку A' , то одновременно, обратно, точка A' переходит в точку A .



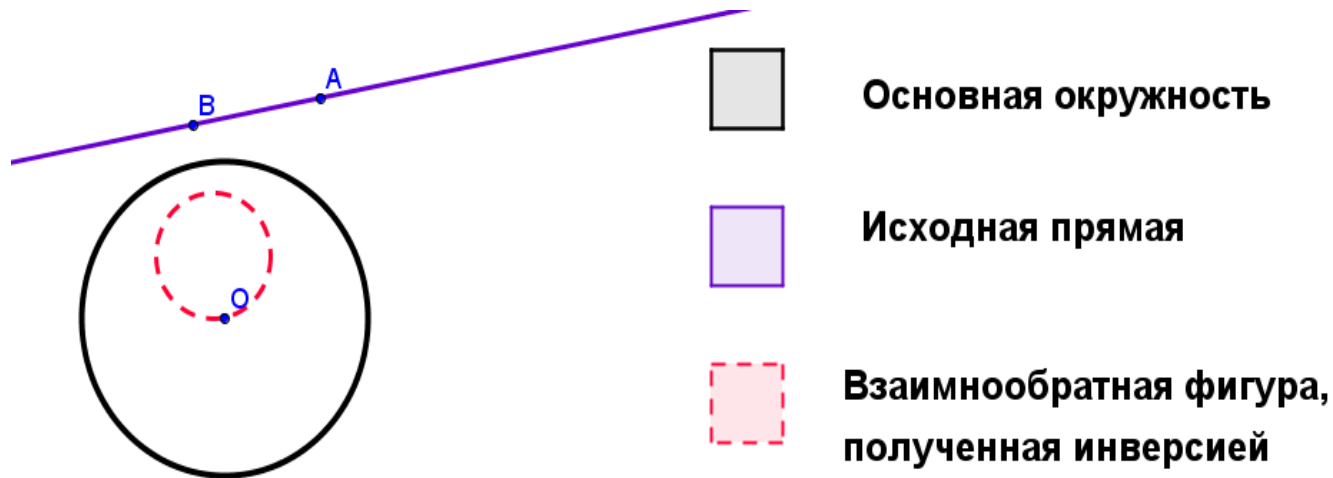
Свойства инверсии

- 3. а) Окружности, не проходящие через O , преобразуются в окружности, не проходящие через O .
- б) Окружности, проходящие через O , преобразуются в прямые, не проходящие через O .



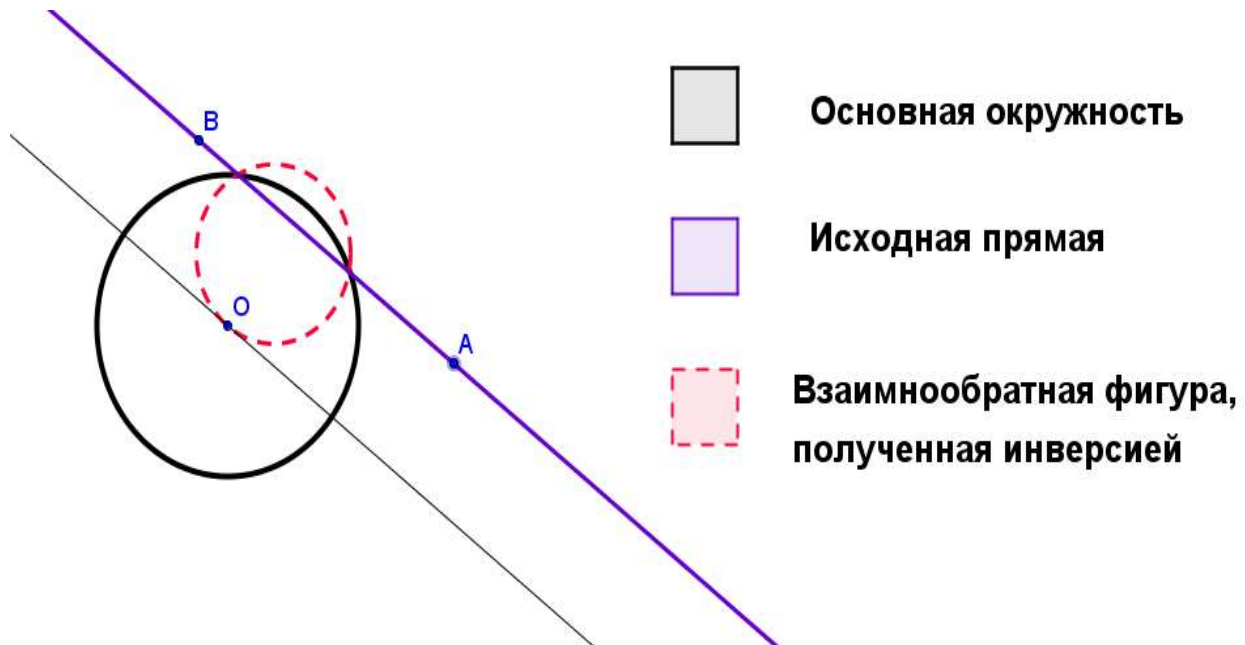
Свойства инверсии

- 4. а) прямые, не проходящие через O , преобразуются в окружности, проходящие через O ;
- б) прямые, проходящие через O , преобразуются сами в себя.



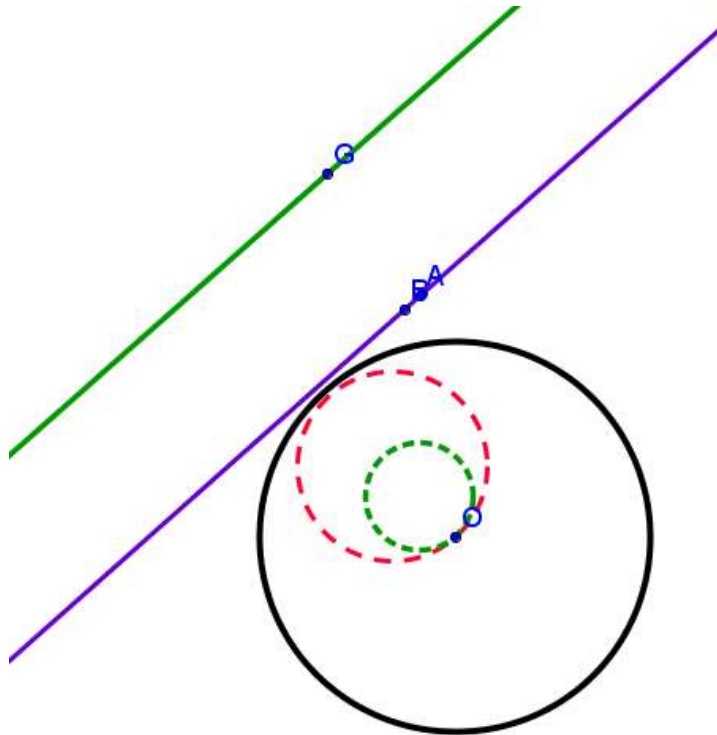
Свойства инверсии

- 5. Прямая, не проходящая через центр инверсии, преобразуется в окружность, проходящую через центр инверсии, причём касательная к этой окружности в центре инверсии параллельна данной прямой



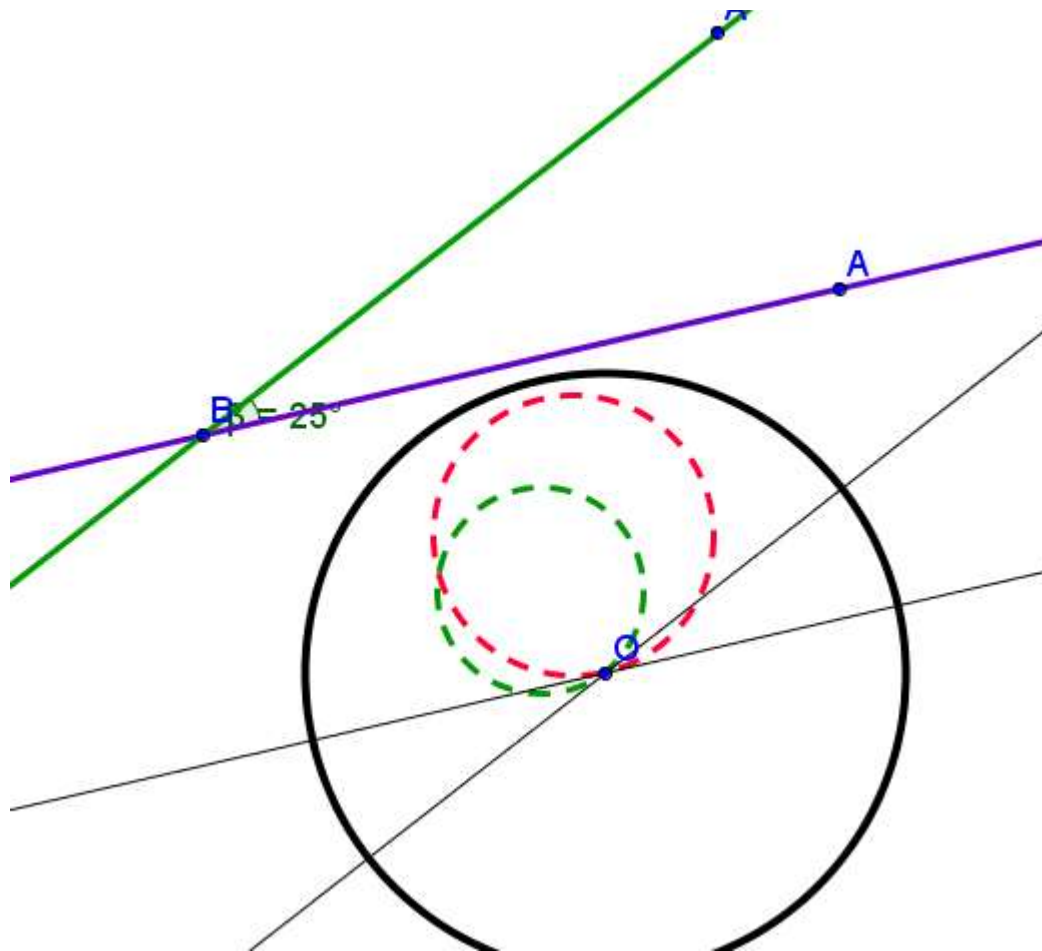
Свойства инверсии

- 6. Прямые, параллельные и не проходящие через центр инверсии, преобразуются в окружности, касающиеся друг друга в центре инверсии и обратно.



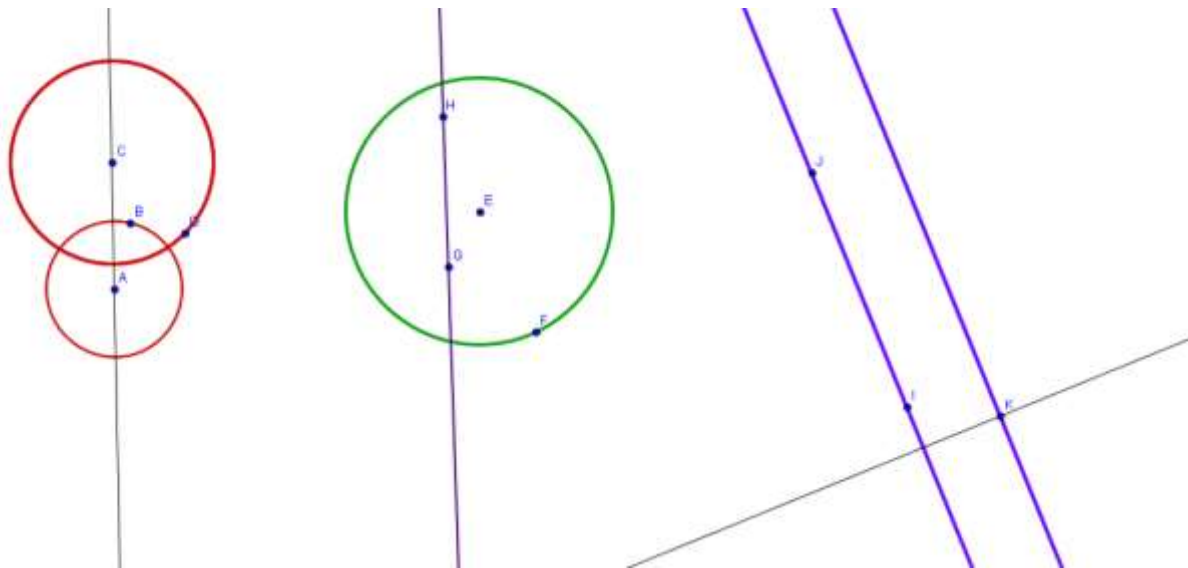
Свойства инверсии

- 7. Инверсия есть конформное преобразование, то есть при инверсии угол между двумя кривыми в точке их пересечения сохраняется.



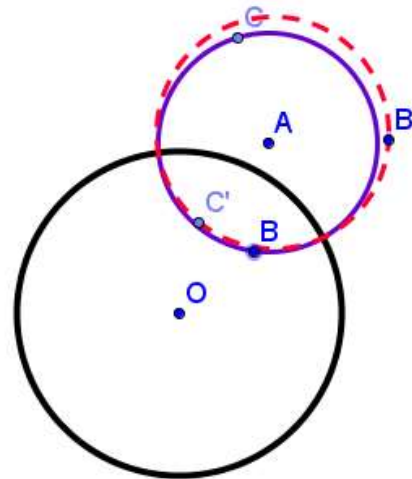
Свойства инверсии

- 8. Как бы ни были расположены в плоскости две произвольные окружности, или окружность и прямая, или две параллельные прямые, всегда можно их преобразовать друг в друга при помощи инверсии, если к инверсии причислить его предельный случай – симметрию относительно прямой.



Свойства инверсии

- 9. Всякую окружность (или прямую) можно при помощи инверсии преобразовать саму в себя так, чтобы две фиксированные точки этой окружности (или прямой) переходили друг в друга.



Исследовательские задачи

- На определение взаимного расположения основной окружности относительно фигуры, полученной инверсией;
- На определение зависимости радиуса (расстояния между точками) фигуры, полученной инверсией, от радиуса основной окружности.

Решить задачу

Определите взаимное расположение исходной прямой и основной окружности при условии, что радиус взаимнообратной окружности, полученной инверсией исходной прямой, равен четверти диаметра инверсии.

$a = 4$

Основная окружность

Исходная прямая

Взаимнообратная окружность, полученная инверсией

☐ Ответ