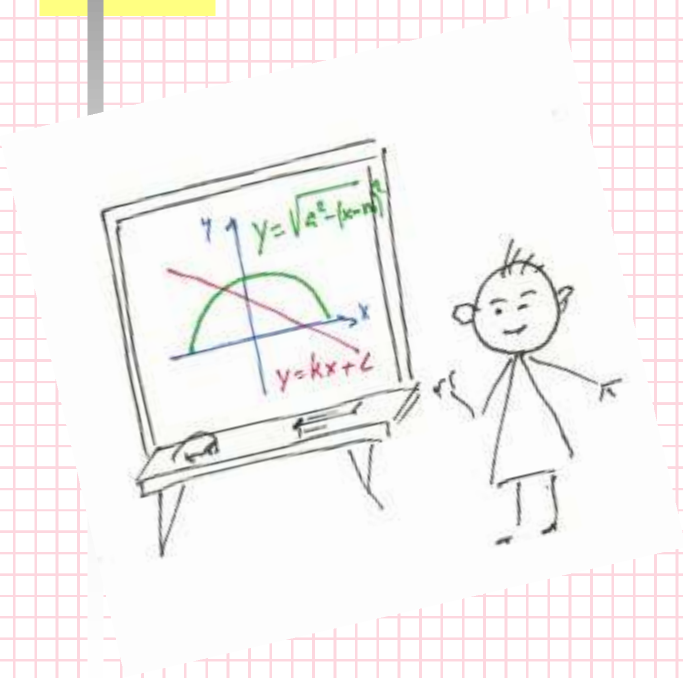
Методическая разработка урока –исследования в рамках подготовки к ЕГЭ по математике на примере темы:

«Решение иррациональных уравнений с параметром»



Учитель математики

Паршева Валентина Васильевна

г. Северодвинск

2013 – 2014

«Правильному применению методов можно научиться только применяя их на разнообразных примерах».

Г. Цейтен

.

Цель урока: научиться решать иррациональные уравнения с параметром.

Задачи урока:

Учебные

- Установить возможные способы решения иррациональных уравнений с параметром.
- Составить алгоритмы решения таких уравнений для каждого способа, если это возможно.
- Применить новые знания при решении задач.

Развивающие

- Учиться искать необходимую информацию по заданной теме, используя различные источники.
- Продолжать отрабатывать навыки исследовательской деятельности (анализировать, сравнивать, делать обобщение, выдвигать гипотезу, проводить моделирование в ИГС GeoGebra).

Воспитательные

- Формировать навыки умственного труда.
- Продолжить формирование навыка работать в группе.

Как записать данные иррациональные уравнения с параметром а в общем виде?

$$\sqrt{a^2-(x+2)^2}=x-4;$$

$$\sqrt{a^2-(x-5)^2}=2x-7;$$

$$\sqrt{a^2-(x-m)^2}=kx+l$$

$$\sqrt{a^2-(x-3)^2}=-3x+5;$$

$$\sqrt{a^2-(x+4)^2}=5x-3,$$

$$\sqrt{a^2-(x-m)^2}=kx+l$$

$$\sqrt{a^2-(x-3)^2}=-x+2;$$

$$\sqrt{4-(x-m)^2}=2x-3$$

$$\sqrt{9-(x-2)^2}=kx+2$$

$$\sqrt{4-(x+3)^2}=-2x+l$$

Алгебраический способ решения иррациональных уравнение с параметром вида:

$$\sqrt{a^2-(x-m)^2}=kx+l$$

m, k и l – заданные числа, a – параметр.

$$\sqrt{a^2-(x-3)^2}=-x+2;a>0;$$

$$\sqrt{a^2-(x+2)^2}=x-2,a>0;$$

$$\boxed{\sqrt{a^2-(x+2)^2}=-x+2,a>0;}$$

Решите данное уравнение алгебраически с соответствующими исследованиями

$$\sqrt{a^2-(x+2)^2}=-x+2, a>0.$$

$$1) -x+2\geq 0, x\leq 2;$$

$$2) a^2-(x+2)^2\geq 0;$$

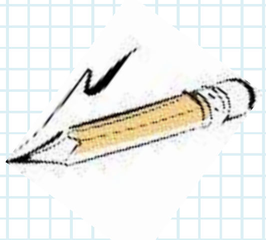
$$x^2+4x-a^2+4\leq 0;$$

$$x=-2\pm a - \textit{нули квадратного трехчлена};$$

$$-2-a\leq x\leq -2+a;$$

$$x\in[-2-a;-2+a].$$

Решение рассказывают ученики по слайдам подготовленным ими к уроку.



$$\sqrt{a^2-(x+2)^2}=-x+2, a>0.$$

$$a^2-x^2-4x-4=x^2-4x+4;$$

$$2x^2=a^2-8;$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2-8}{2}};$$

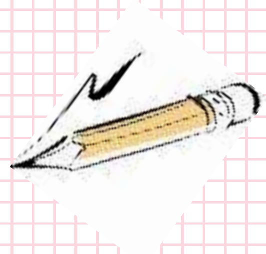
Проведем исследование, чтобы установить корни уравнения в зависимости от параметра a.

$$a^2-8\geq 0;$$

$$(a-2\sqrt{2})(a+2\sqrt{2})\geq 0;$$

$$a\in(-\infty;-2\sqrt{2}]\cup[2\sqrt{2};\infty);$$

$$т.к. a>0, a\in[2\sqrt{2};\infty).$$



$$x \le 2$$

$$\sqrt{\frac{a^2-8}{2}} \le 2$$

$$\frac{a^2-8}{2} \le 4;$$

$$a^2-8 \le 8;$$

$$a^2-16 \le 0;$$

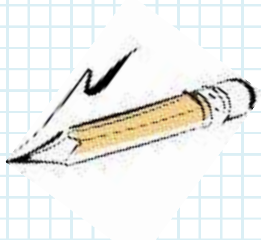
$$(a-4)(a+4) \le 0;$$

$$a \in [-4;4].$$

Вывод:

$$\begin{cases} a \in [-4;4] \\ a \in [2\sqrt{2};\infty) \end{cases};$$

$$a \in [2\sqrt{2};4].$$



Установим, при каких значениях *a* выполняется условие 2.

$$-2-a\le x\le -2+a;$$

$$1)\ -2-a\le -\sqrt{\frac{a^2-8}{2}}\le \sqrt{\frac{a^2-8}{2}}\le -2+a;$$

$$1)\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a^2-8}{2}}\le -2+a;\\ -2-a\le -\sqrt{\dfrac{a^2-8}{2}};\end{cases}\qquad \begin{cases}a-2\ge \sqrt{\dfrac{a^2-8}{2}};\\ \sqrt{\dfrac{a^2-8}{2}}\le 2+a;\end{cases}\qquad \begin{cases}a^2-4a+4\ge \dfrac{a^2-8}{2};\\ \dfrac{a^2-8}{2}\le a^2+4a+4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-8a+16\ge 0;\\ a^2+8a+16\ge 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}(a-4)^2\ge 0;\\ (a+4)^2\ge 0.\end{cases}\qquad a=4.$$

$$\boxed{x=\pm\sqrt{\frac{a^2-8}{2}};\qquad при\qquad a=4\quad x=\pm 2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2-8}{2}};\ a \in [2\sqrt{2};4].$$

$1)\ a = 2\sqrt{2},\ x = 0;$

$2)\ a = 4,\ x = \pm 2;$

$3)\ a \in (2\sqrt{2};4),\ x = \pm\sqrt{\dfrac{a^2-8}{2}};$

$4)\ a < 2\sqrt{2},\ a^2 - 8 < 0,$ корней нет.

$5)\ a > 4;$

$a = 6,\ x = \pm\dfrac{2\sqrt{7}}{2},$ т.к. $x < 2$, *корень может быть только отрицательным,*

т.е., при $a > 4$ $x = -\sqrt{\dfrac{a^2-8}{2}}.$

Ответ:

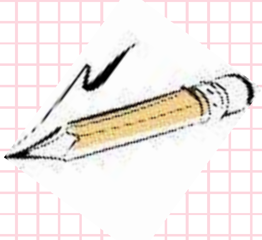
$$1)\ a = 2\sqrt{2},\ x = 0;$$

$$2)\ a < 2\sqrt{2},\ \textit{корней}\quad \textit{нет};$$

$$3)\ a = 4,\ x = -2,\quad x = 2;$$

$$4)\ 2\sqrt{2} < a < 4,\ x = \pm\sqrt{\frac{a^2-8}{2}};$$

$$5)\ a > 4,\ x = -\sqrt{\frac{a^2-8}{2}}.$$



Делаем анализ алгебраического решения

- *Решение трудоемкое.*
- *Надо проводить много исследований полученных промежуточных результатов.*
- *Не наглядное.*

Графический способ решения иррациональных уравнение с параметром вида:

$$\sqrt{a^2-(x-m)^2}=kx+l; a>0$$

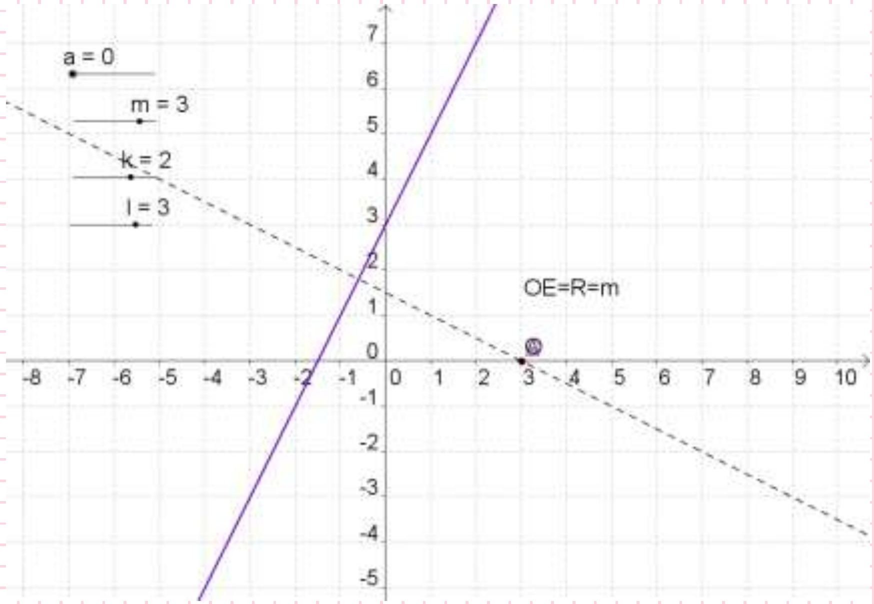
m, k, l –числа, в данной задаче не изменяются.

a –параметр, изменяется в данной задаче.

$$y=\sqrt{a^2-(x-m)^2}; y>0-\text{верхняя полуокружность},$$

$$O(m;0), R=a$$

y=kx+l, прямая, проходящая через точки (0; l) и (-l/k)



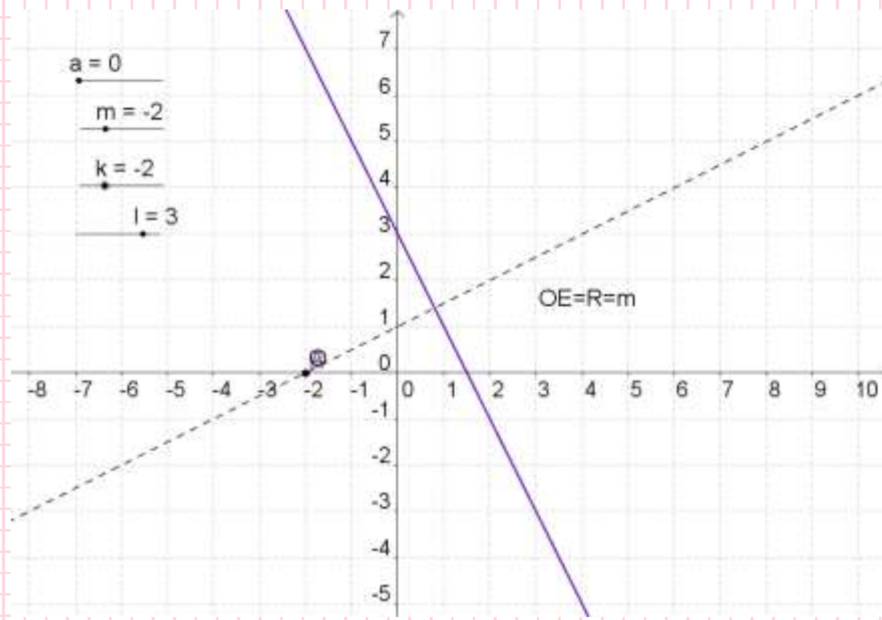
$$\sqrt{a^2-(x-m)^2}=kx+l; a>0$$

$$y=\sqrt{a^2-(x-m)^2}; y>0-$$

– верхняя полуокружность,

$O(m;0), R=a$

a –параметр,
изменяется в данной задаче.



m, k, l –числа, в данной задаче не изменяются.

1_общий.ggb

Решить уравнение графическим способом

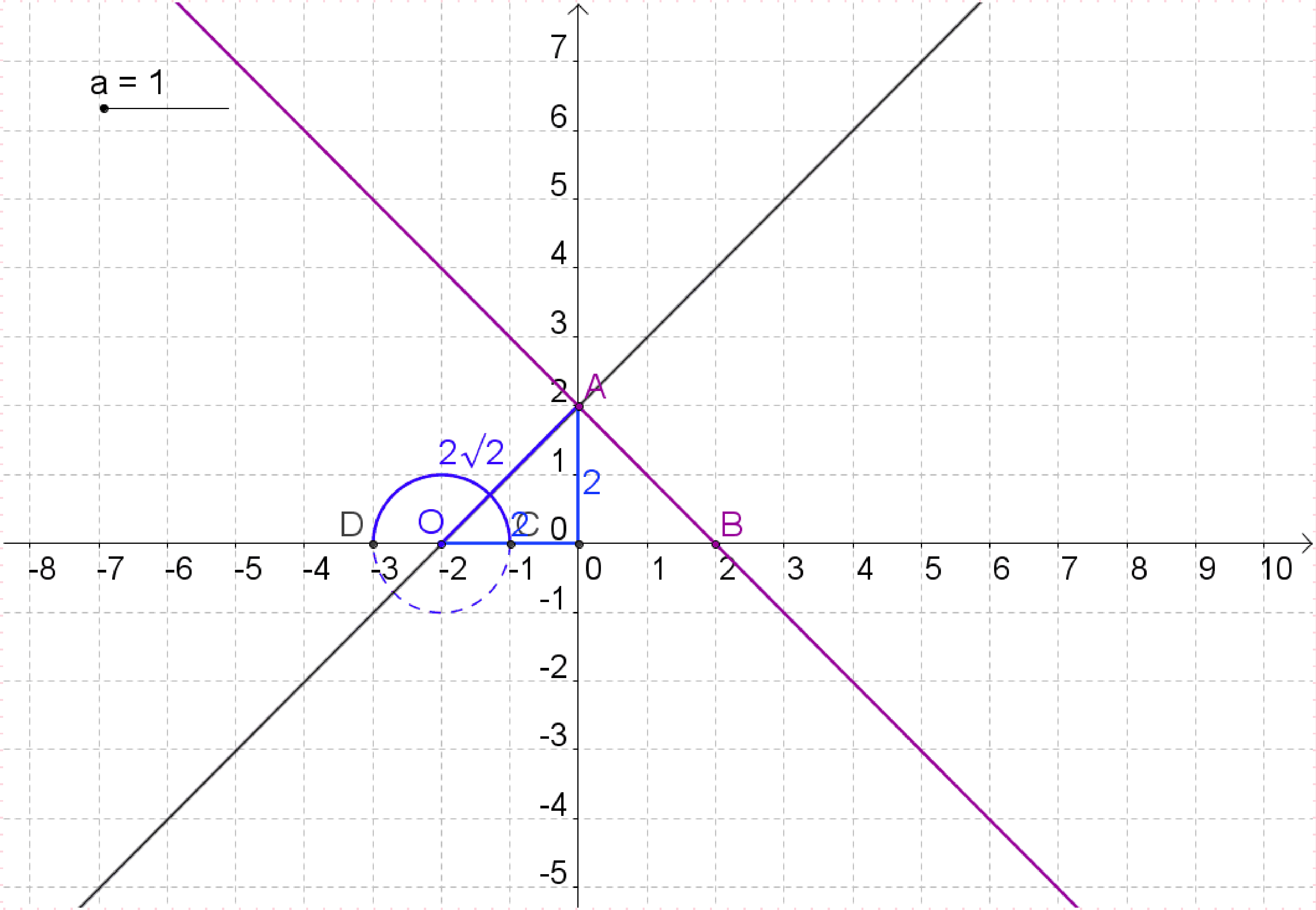
Фронтальная работа

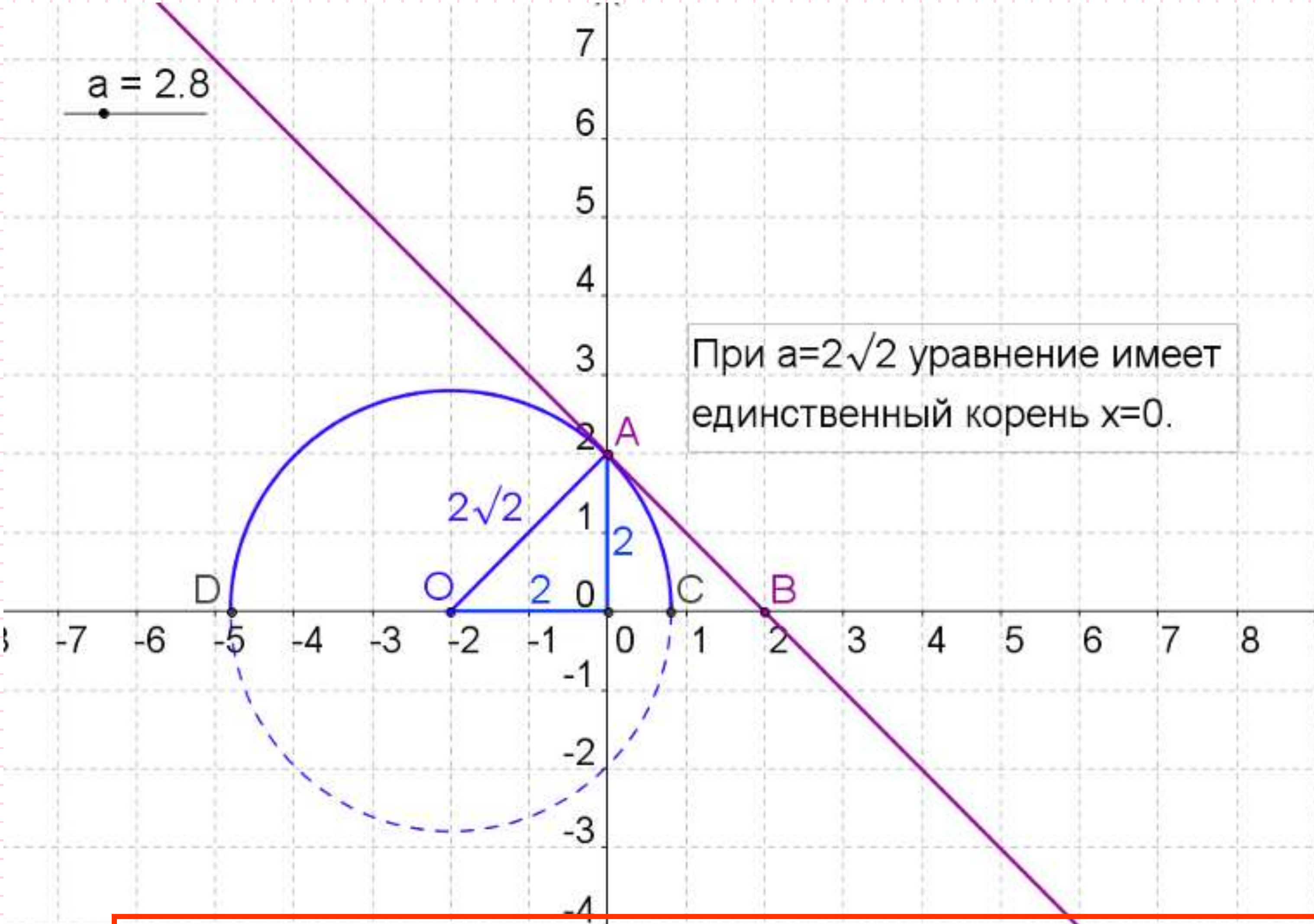
$$\sqrt{a^2-(x+2)^2}=-x+2,\ a>0.$$

$$-x+2\geq 0;\ x\leq 2.\quad a^2-(x+2)^2\geq 0.$$

$y=-x+2$ – прямая, проходящая через точки $A(0;2)$ и $B(2;0)$.

$y=\sqrt{a^2-(x+2)^2};\ y\geq 0$ – *это полуокружность с центром* $(-2;0)$ *и радиусом* $r=a$.


a = 1
A
B
C
D
O
2√2
2
2
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10



?

Как найти точку касания полуокружности и прямой $y = -x + 2$?

- Уравнение прямой, перпендикулярной данной прямой $y=-x+2$ и проходящей через центр полуокружности точку $O(-2;0)$: **?**

- Координаты точки А – точки пересечения данной прямой и прямой перпендикулярной ей: **?**

- Нахождение длины радиуса полуокружности: **?**

СПРАВКА

$$\sqrt{a^2-(x+2)^2}=-x+2, a>0.$$

$$-x+2\ge 0; x\le 2. \quad a^2-(x+2)^2\ge 0.$$

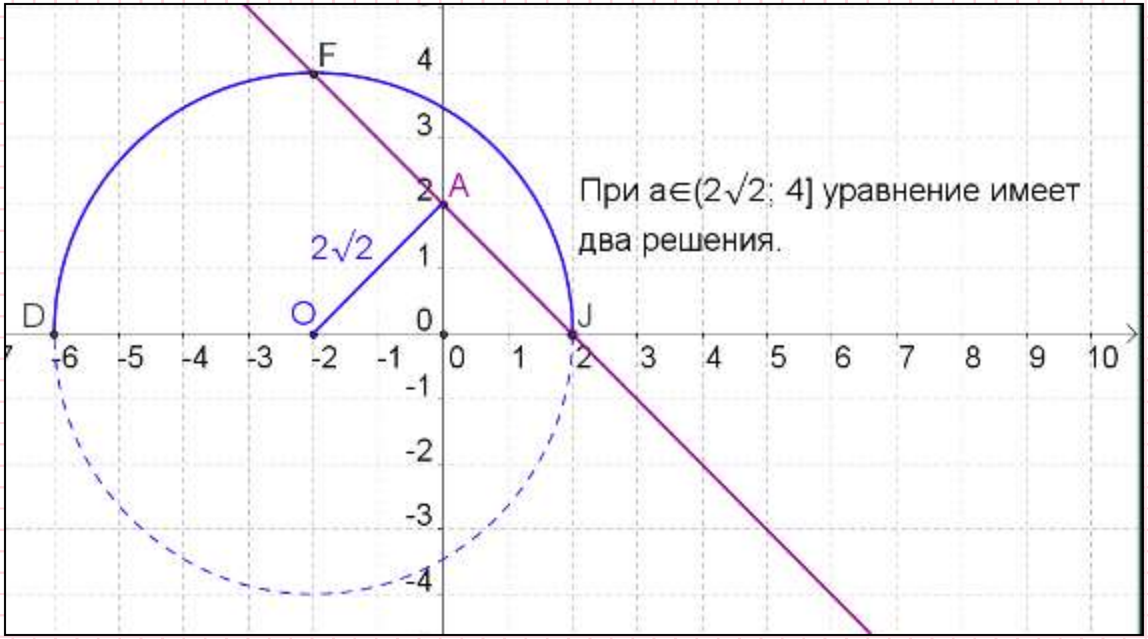
$y=-x+2-$ прямая, проходящая через точки $A(0;2)$ и $B(2;0)$.

$y=\sqrt{a^2-(x+2)^2}; y\ge 0-$ *это полуокружность с центром* $(-2;0)$ *и радиусом* $r=a$.

При $a=2\sqrt{2}$ *полуокружность и прямая касаются в точке* $A(0;2)$ $\quad r=a=2\sqrt{2}$.

Уравнение имеет единственное решение $x=0$.

- Полуокружность и прямая не имеют общих точек, уравнение не имеет решений.



- Прямая и полуокружность имею две общие точки F и J, - уравнение имеет два решения:

при а=4 х=2 и х=-2

- При других значениях а из этого промежутка решения находятся алгебраическим способом.

Абсциссы точек E и F (корни уравнения) найдем обычным алгебраическим решением

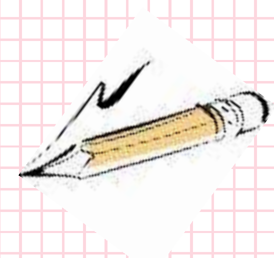
$$\sqrt{a^2-(x+2)^2}=-x+2, a>0.$$

$$a^2-x^2-4x-4=x^2-4x+4;$$

$$2x^2=a^2-8;$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2-8}{2}};$$

$$a\in(2\sqrt{2};4).$$

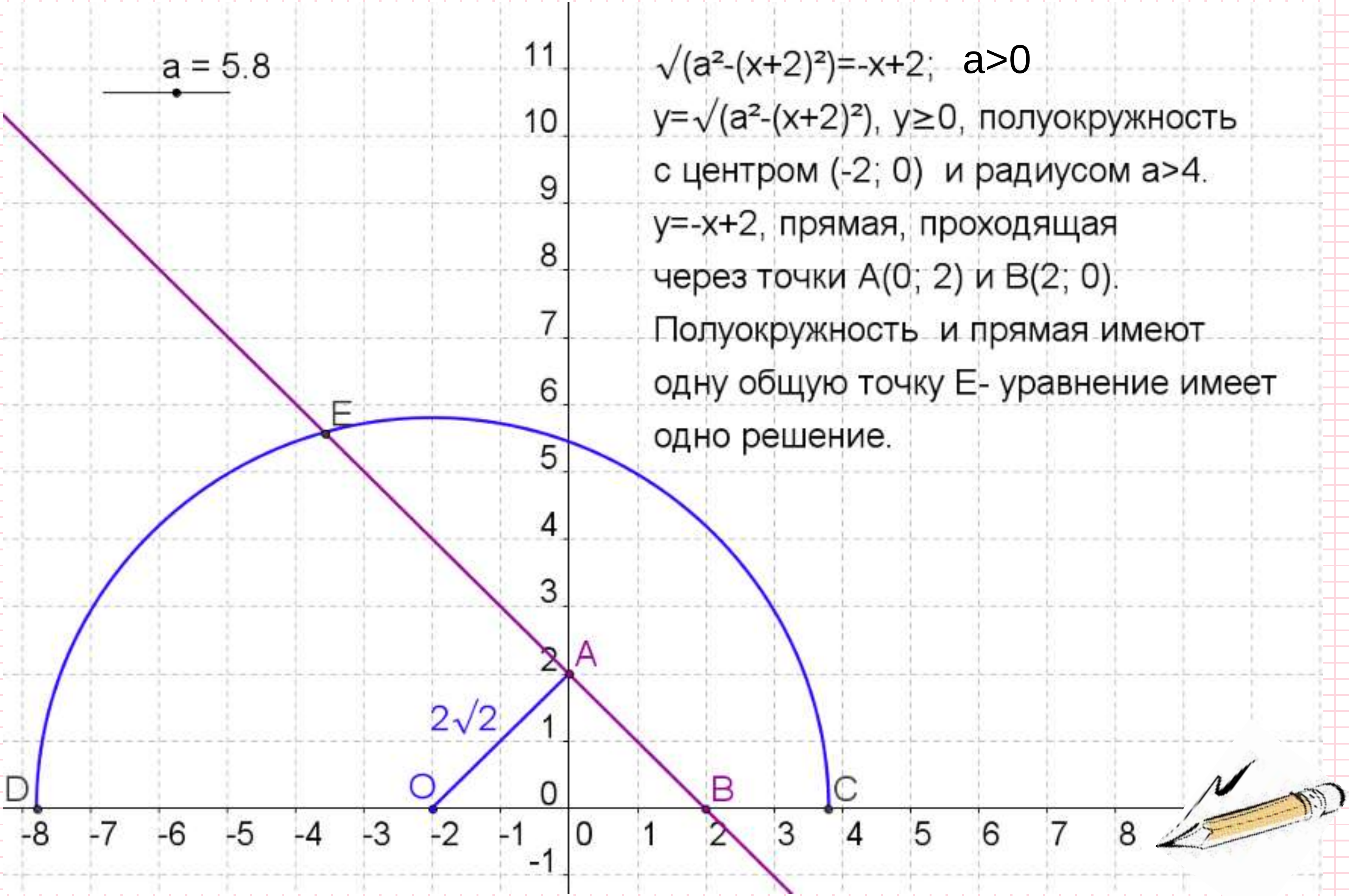


$\sqrt{(a^2-(x+2)^2)}=-x+2;$ $a>0$

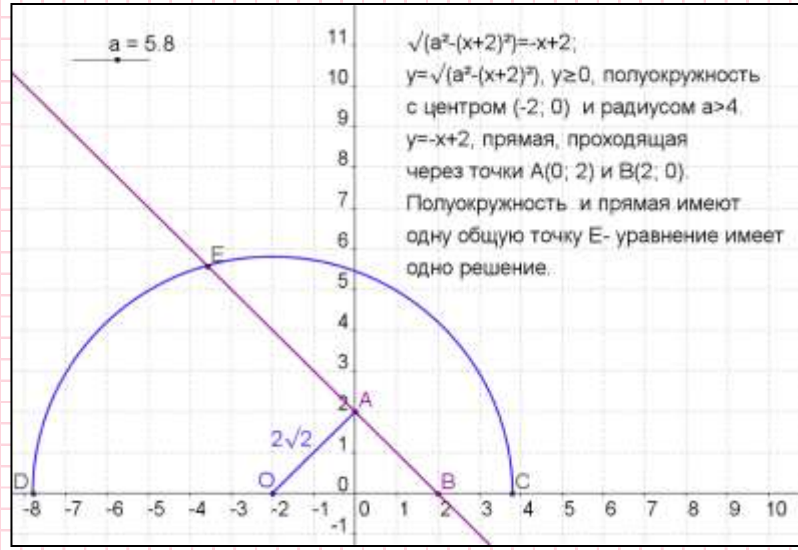
$y=\sqrt{(a^2-(x+2)^2)}$, $y\geq 0$, полуокружность с центром (-2; 0) и радиусом $a>4$.

$y=-x+2$, прямая, проходящая через точки A(0; 2) и B(2; 0).

Полуокружность и прямая имеют одну общую точку E- уравнение имеет одно решение.



Абсциссу точки Е (корень уравнения) найдем обычным алгебраическим решением



$$\sqrt{a^2-(x+2)^2}=-x+2, a>0.$$

$$a^2-x^2-4x-4=x^2-4x+4;$$

$$2x^2=a^2-8;$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{a^2-8}{2}};$$

$$x=-\sqrt{\frac{a^2-8}{2}}.$$

Из геометрических соображений (см. чертеж) делаем вывод, что корень отрицательный.

Ответ:

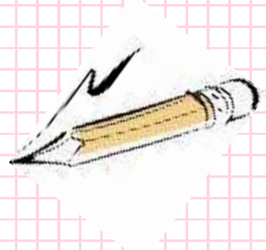
$1)a = 2\sqrt{2}, x = 0;$

$2)a < 2\sqrt{2},$ *корней нет*;

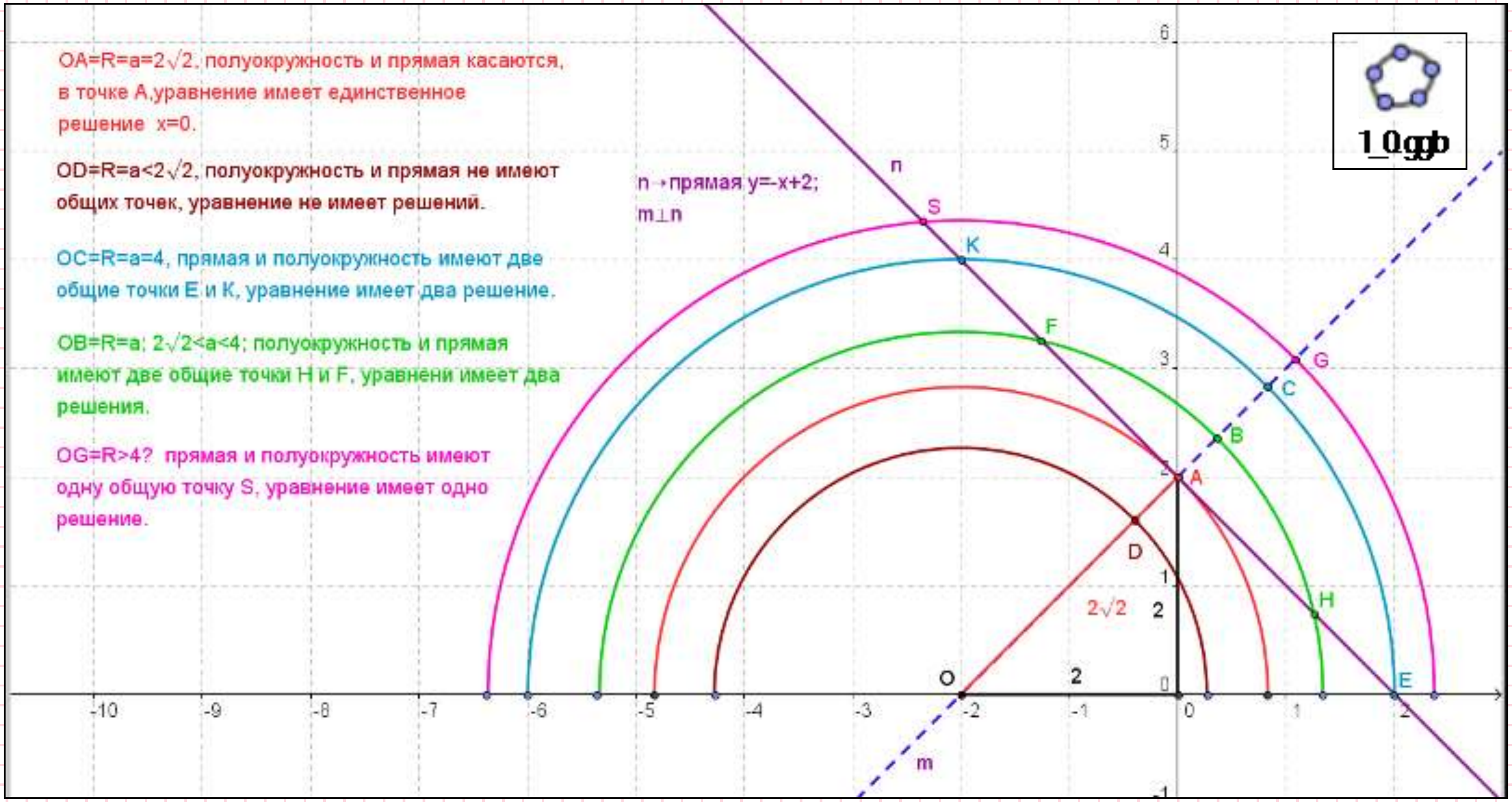
$3)a = 4, x = -2, \quad x = 2;$

$$4)2\sqrt{2} < a < 4, x = \pm\sqrt{\frac{a^2 - 8}{2}};$$

$$5)a > 4, x = -\sqrt{\frac{a^2 - 8}{2}}.$$



Как сделать чертеж в тетради?



- Как найти координаты точки касания полуокружности и прямой – точки А? Как найти уравнение прямой m и координаты точки пересечения этой прямой с прямой n? Как найти OA? Как найти координаты точек пересечения прямой n и полуокружности при разных значениях а?

Алгоритм решения иррационального уравнения с параметром $\sqrt{a^2-(x-m)^2}=kx+l; a>0.$

1. Ввести функции:

$$y=\sqrt{a^2-(x-m)^2}; y>0 \text{ -- } \textit{верхняя полуокружность}, O(m;0), R=a.$$

$$y=kx+l - \textit{прямая}.$$

2. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой y=kx+l и проходящей через центр полуокружности O(m,0).
3. Найти координаты точки их пересечения.
4. Найти длину радиуса полуокружности
5. Выполнить динамическую модель (или чертеж в тетради), выделив при различных значениях точки пересечения полуокружности и прямой y=kx+l. Найти алгебраическим способом абсциссы этих точек., определить, какому промежутку они принадлежат.
6. Выписать ответ.

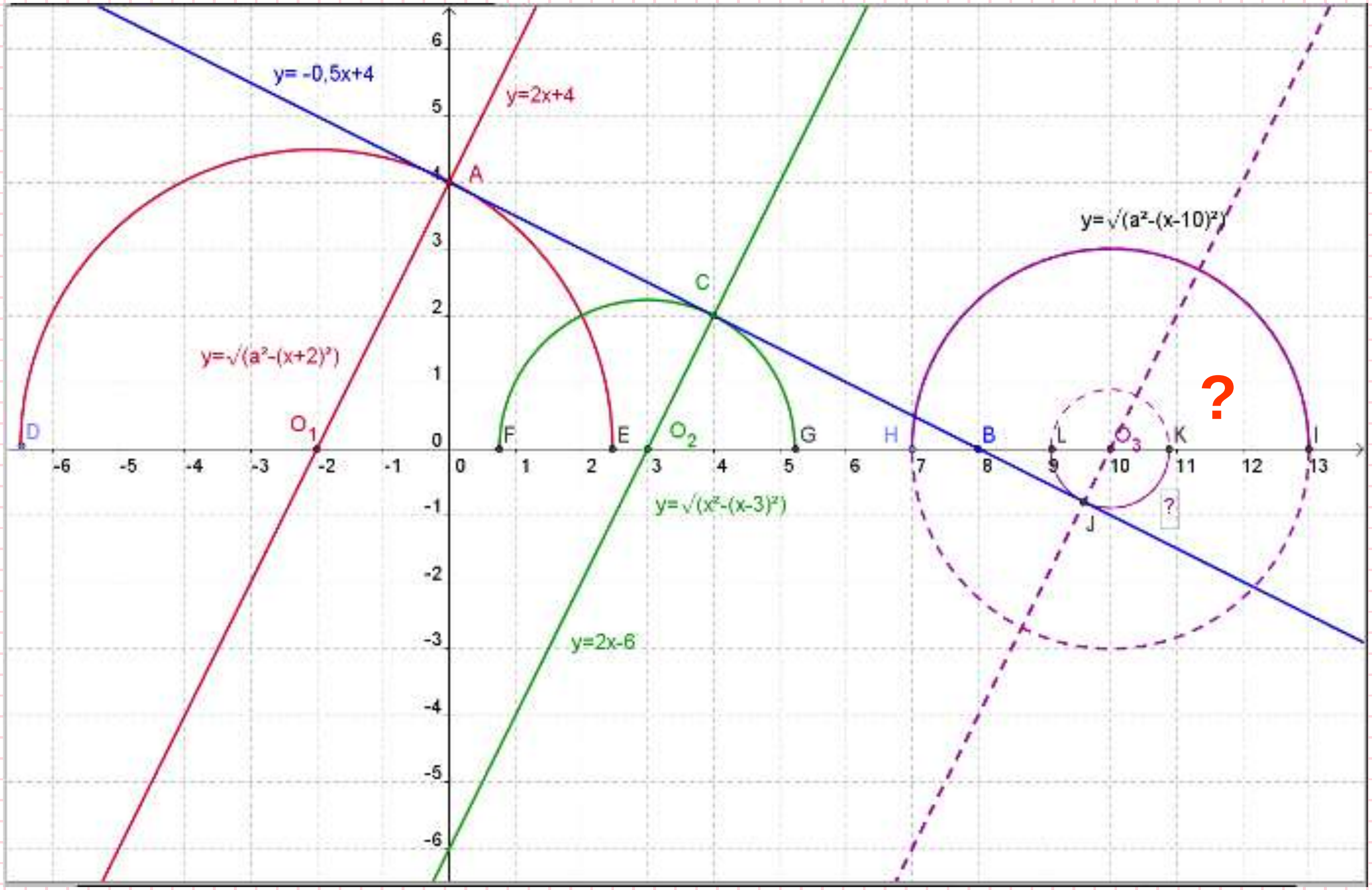
СПРАВКА

?

Сравним способы решения данного уравнения.

Применение геометрических соображений делает решение уравнения с параметром

- наглядным;
- более легким;
- более красивым и изящным.



$$\sqrt{a^2-(x-m)^2}=kx+l; a>0.$$

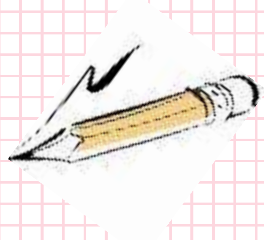
Тема для исследования: Как изменится решение при изменении значений k, l, m?

Домашнее задание:

Оформить решение уравнения (способ оформления по выбору -в тетради или создать презентацию)

Домашнее задание (бонус) для учеников - исследователей

Выполнить исследовательскую работу на одну из тем:



- «Такие разные иррациональные уравнения с параметром»;
- «Графический способ решения иррациональных уравнений вида $\sqrt{a^2-(x-m)^2}=kx+l$ ».
- «Как решить уравнение вида $\sqrt{m-x}+l=ax^2+bx$, где а –параметр?
- Собственная тема на решение уравнения с параметром.

Вывод

1. Решая иррациональное уравнение с параметром мы установили, что графики значительно облегчают решение уравнения. Поэтому при решении уравнений с параметром полезно выполнять графические иллюстрации, что делает решение более наглядным, понятным, простым и красивым. Графические построения помогают осмыслить решение уравнения с параметром.

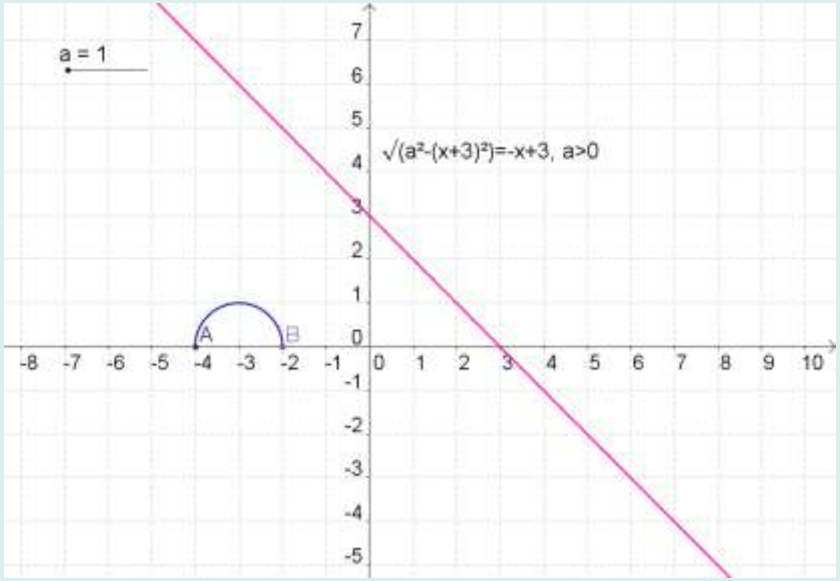
2. Необходимо уметь вопрос, первоначально касающийся уравнения, *переформулировать для графика* этого уравнения.

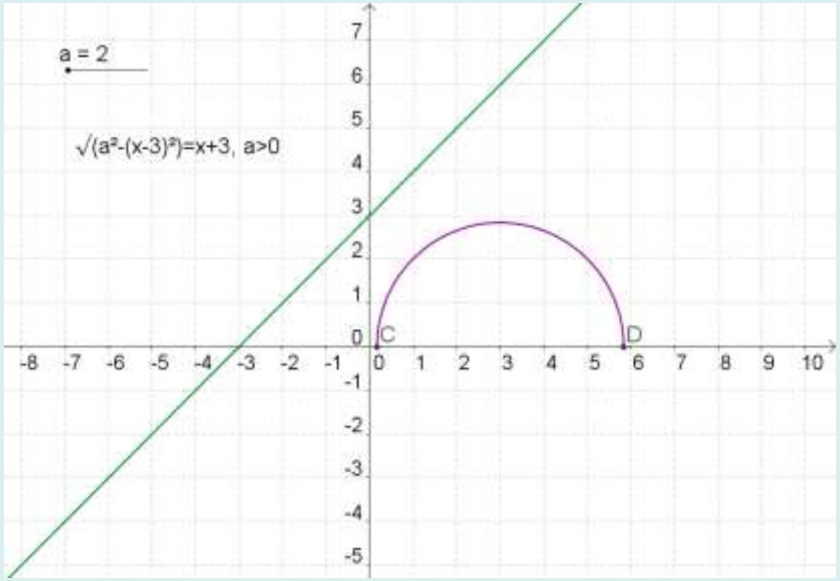
3. Для решения уравнений с параметром надо уметь читать графики уравнений с параметр

Источники информации

1. Локоть В.В. Задачи с параметрами. Учебное пособие.- М.:АРКТИ, 2005,-96с.
2. Маргулис А.Я., Мордкович А.Г., Радунский Б.А. Внимание: в уравнении – параметр. Квант. Научно – популярный физико – математический журнал. №9,1970 г. – М. «Наука»;
3. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметром в ЕГЭ Под редакцией Б.Г. Зива –С-Петербург, М. : ЧеРо на Неве, Издательство Московского университета, 2004.- 224с.

Примеры для самостоятельной работы





Работа в парах

$$а)\sqrt{a^2-(x+3)^2}=-x+3, a>0;$$

$$б)\sqrt{a^2-(x-3)^2}=x+3, a>0;$$

$$в)\sqrt{a^2-(x+2)^2}=x-2, a>0;$$

$$г)\sqrt{a^2-(x+2)^2}=2-x, a>0;$$

$$д)\sqrt{a^2-(x-2)^2}=x+2, a>0;$$

$$е)\sqrt{a^2-(x+2)^2}=x+2, a>0.$$

Итоги самостоятельных работ учащихся

- Калинина Д, Суворова А.
- Медников К., Чабанов Г.
- Шопин А., Харин С.
- Лытасов Н., Танасевич В.
- Петров Н., Пятин И.

Спасибо за внимание!

С П Р А В К А

1. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой $y=2x-5$ и проходящей через точку М(1; -2).

Решение. $y=2x-5$; $k_1=2$, $l_1=-5$. Для того, чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы произведение их угловых коэффициентов было равно -1: $k_1 \cdot k_2=-1$. $k_2=-0,5$. Чтобы найти значение l_2 надо в уравнение

$y=-0,5x+l$ *подставить* $x=1$ *и* $y=-2$ (координаты заданной точки М). $-2=-0,5 \cdot 1+l$; $l=-1,5$.

Уравнение искомой прямой: $y=-0,5x-1,5$ *или* $2y=-x-3$

С П Р А В К А

2. Найти координаты точки пересечения прямых

у=2х-5 и *у=-0,5х-1,5.*

Решение. Прямые *у=2х-5* и *у=-0,5х-1,5* *пересекаются в точке с одной и той же ординатой.*

Значит, 2х-5 = -0,5х-1,5 ,2,5х=3,5, 5х=7. х=1,4.

Точка пересечения прямых имеет координаты х=1,4 и у=2.2: А(1,4; 2,2).

Ответ: А(1,4; 2,2).

С П Р А В К А

3. Найти расстояние между точками $M(x_1;y_1)$ и $A(x_2; y_2)$.

Решение. Расстояние между точками на координатной плоскости находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Слайд 14

Слайд 25