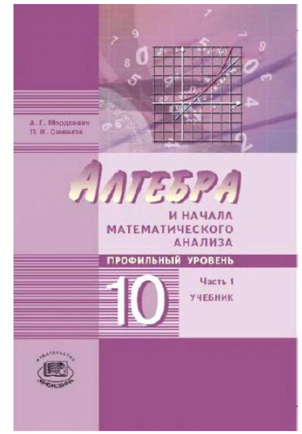
Комплексные числа

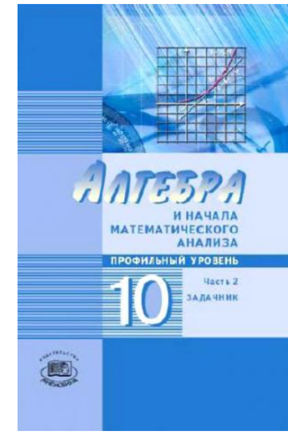
РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

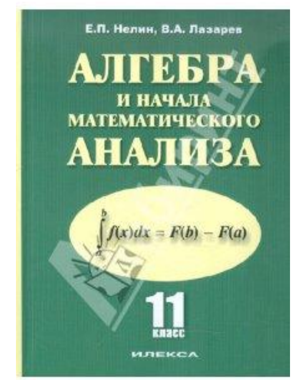
Урок алгебры в 10 классе

Автор – учитель МБОУ СОШ № 8

Белорукова Марина Васильевна







Урок в системе уроков алгебры

Комплексные числа - 10 часов		
№ п/п	Содержание материала	Количество часов
1.	Комплексные числа и арифметические операции над ними	2
2.	Комплексные числа и координатная плоскость	1
3.	Тригонометрическая форма записи комплексного числа	1
4.	***Решение уравнений с комплексными переменными***	***2***
5.	Комплексные числа и квадратные уравнения	1
6.	Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа	2
7.	Контрольная работа № 6 по теме « Комплексные числа»	1

План урока

Этап урока	Форма организации	Время
1. Организационный момент	Фронтальная работа	2 мин
2. Теоретический опрос	Фронтальная работа	2 мин
3. Актуализация знаний и умений учащихся	Фронтальная работа	7 мин
4. Нахождение способа решения уравнения	Групповая работа учащихся в ИГС	30 мин
5. Закрепление способов решения уравнений	Групповая работа учащихся в ИГС	15 мин
6. Исследовательская работа	Индивидуальная или парная работа учащихся в ИГС. Фронтальная работа	30 мин
7. Подведение итогов урока	Фронтальная работа	4 мин

Цель

- Формирование умений решать уравнения с комплексными переменными разными способами.

Эпиграф

«Жизнь украшается двумя вещами – занятием математикой и её преподаванием»

С. Пуассон

Сегодня на уроке

- повторим теоретический материал по теме: «Комплексные числа»;
- в качестве подготовительной работы для проведения открытий разных способов решений одной задачи, вам будут предложены практические задания;
- работа в группах – поиск решения задачи по предложенному способу;
- исследовательская работа, в ходе которой вы откроете новое математическое понятие;

Теоретический опрос

1. Определение комплексного числа.
2. Алгебраическая форма комплексного числа.
3. Формула модуля комплексного числа.
4. Какие ГМТ вы знаете?

Постановка проблемы

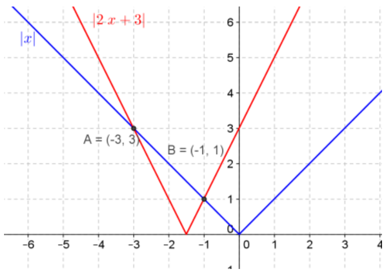
Проверьте решения

двух уравнений:

$|x| = |2x + 3|$, $x \in Z$

$$x = \pm(2x + 3)$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = -3$$



$|z + 3 \cdot i| = |z + 4|$, $z \in C$

$$z + 3 \cdot i = \pm(z + 4)$$

$3 \cdot i = 4$ или $2z = -3i - 4$

$$z = -1{,}5i - 2$$

- Это верные равенства?

$$3 \cdot i \neq 4; \; 2x + (2y + 3)i \neq -4$$

Постановка проблемы

Как вы думаете, верно ли решено второе уравнение?

Где и почему допущена ошибка? Каков характер допущенной ошибки?

Ошибка возникла из-за путаницы с вычислением модуля:

Геометрический смысл одинаков в обоих случаях: расстояние от начала координат до точки;

Алгебраически модуль вычисляется по-разному: в первом —

$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0 \\ -x, \ \text{ если } x \leq 0 \end{cases}$; втором — $z = x + i \cdot y;\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Можно ли переносить способы решения уравнений вида $|\quad| = |\quad|$ из действительных чисел на комплексные?

Актуализация знаний и умений учащихся

Итак, для того, чтобы перейти к решению уравнений с комплексными переменными, выполним следующие практические задания;

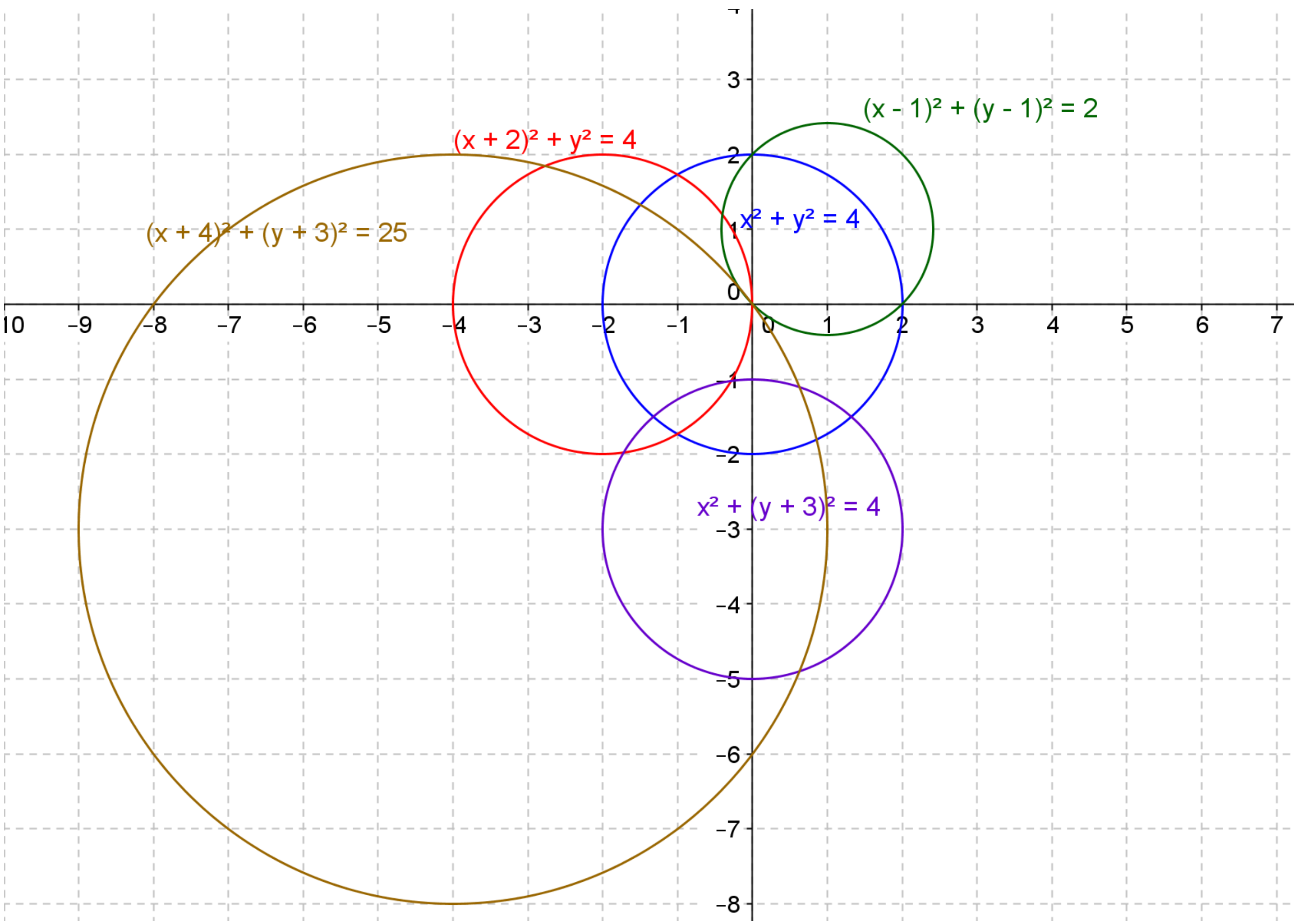
Что представляет на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих данному условию. Обоснуйте свой ответ.

$|z| = 4;\ |z+2| = 4;\ |z+3i| = 4;\ |z-1-i| = \sqrt{2};\ |z+4+3i| = 5.$ [4]

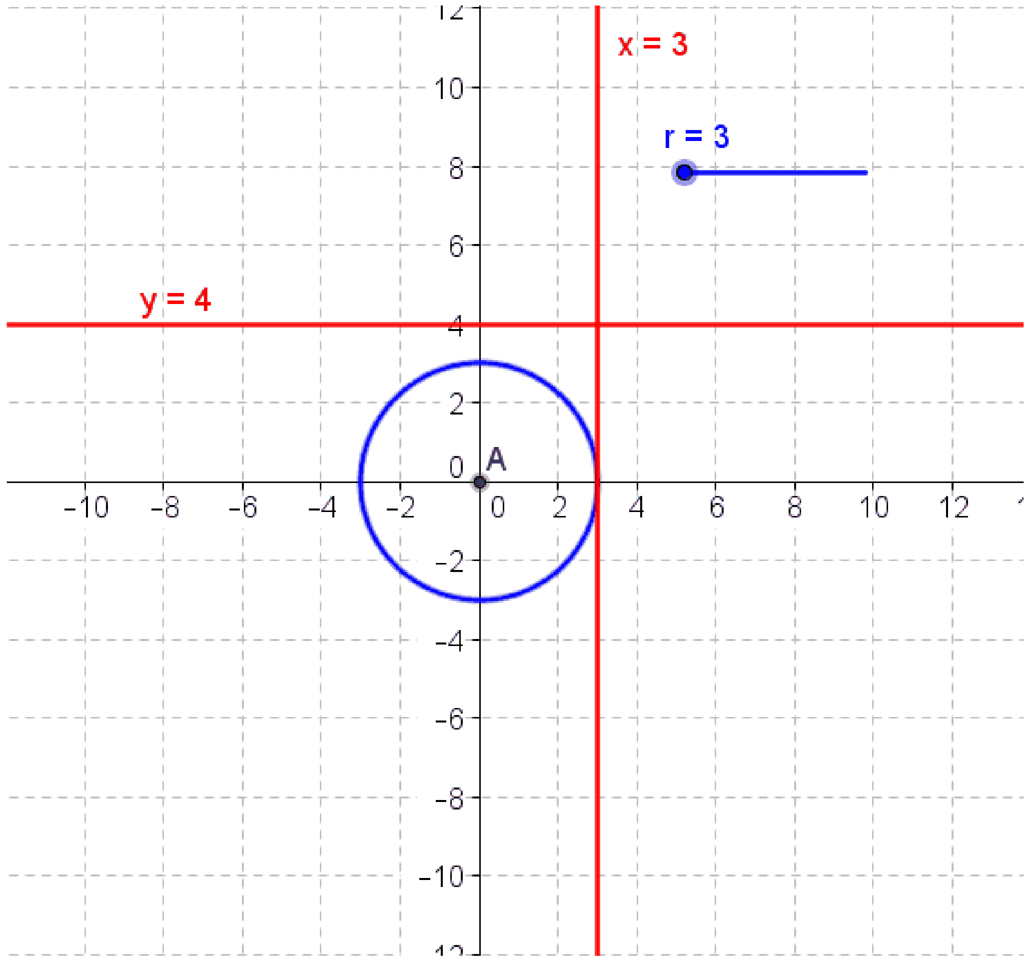
Про комплексное число z известно, что Re z = 3 или Im z = 4. Сколько имеется таких чисел, если, кроме того, известно, что: $|z| = 3;\ |z| = 4;\ |z| = 5;\ |z| = 10.$) [3]

(Для решения данного задания, используйте ИГС GeoGebra)

Актуализация знаний и умений учащихся



Результат построения в ИГС



Актуализация знаний и умений

Постановка задачи.

- Сравните предложенные задания. Чем они похожи и чем отличаются друг от друга?

    1. Найдите все комплексные числа, удовлетворяющие равенству: $|z + 3 \cdot i| = |z + 4|$. [3]
    2. Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих уравнению: $|z + 3 \cdot i| = |z + 4|$.
    3. Найдите геометрическое место точек, удовлетворяющих заданному условию $|z + 3 \cdot i| = |z + 4|$.

Все задания содержат одно и то же уравнение, но вопросы поставлены разные.

В каком виде следует представить ответ в каждом из предложенных заданий?

Нахождение способов решения уравнений

- Для решения предложенных заданий класс делится на 3 группы:

1 группа – задание первое. Составить алгоритм построения модели комплексного числа в ИГС GeoGebra;

2 группа – задание второе. Построить в ИГС GeoGebra полученное множество;

3 группа выполняет задание третье, используя ИГС .

Подсказки

Подсказки для 1 группы:

- ✓ Представьте комплексное число z в виде $x + i \cdot y$ и воспользуйтесь определением модуля комплексного числа.
- ✓ Ответ представьте в виде комплексного числа.

- **Подсказки для 2 группа:**

- ✓ Представьте комплексное число z в виде $x + i \cdot y$ и воспользуйтесь определением модуля комплексного числа.
- ✓ Ответ представьте в виде уравнения функции.

- **Подсказки для 3 группы:**

- ✓ Изобразите на комплексной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих условиям $|z + 3 \cdot i| = r$ и $|z + 4| = r$.
- ✓ Изобразите ГМТ, используя инструменты След и Локус.
- ✓ Определите вид ГМТ. Проверьте гипотезу построением ГМТ.

Защита решений групп

1 группа

$$|z + 3 \cdot i| = |z + 4|$$

Пусть $z = x + y \cdot i$

$|x + y \cdot i + 3 \cdot i| = |x + y \cdot i + 4|$

$|x + (y + 3) \cdot i| = |(x + 4) + y \cdot i|$

По определению модуля комплексного числа получаем:

$x^2 + (y + 3)^2 = (x + 4)^2 + y^2$

Раскроем скобки, применив формулу квадрата суммы

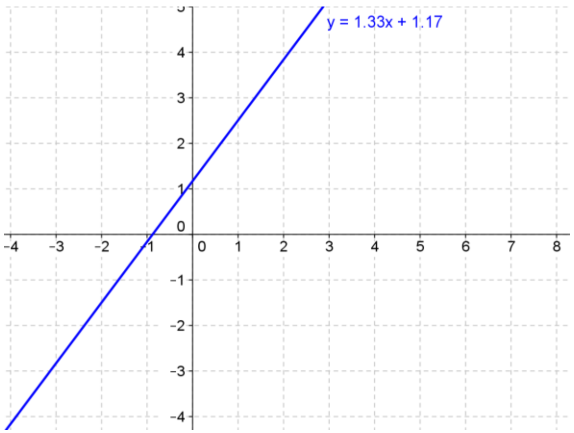
$x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 8x + 16 + y^2$

Приведём подобные слагаемые

$6y = 8x + 7$ $\qquad y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$ $\qquad \boldsymbol{z = x + \left(\frac{4}{3}x + \frac{7}{6}\right)i}$

Алгоритм построения модели: 1. Введем параметр a с помощью ползунка. 2. Введём в строку ввода комплексное число $\boldsymbol{z = a + \left(\frac{4}{3}a + \frac{7}{6}\right)i}$

Защита решений групп



2 группа

$$|z + 3 \cdot i| = |z + 4|$$

Пусть $z = x + y \cdot i$

$$|x + (y + 3) \cdot i| = |(x + 4) + y \cdot i|$$

По определению модуля комплексного числа получаем:

$$x^2 + (y + 3)^2 = (x + 4)^2 + y^2$$

$$(y + 3)^2 - y^2 = (x + 4)^2 - x^2$$

Используем формулу: разность квадратов

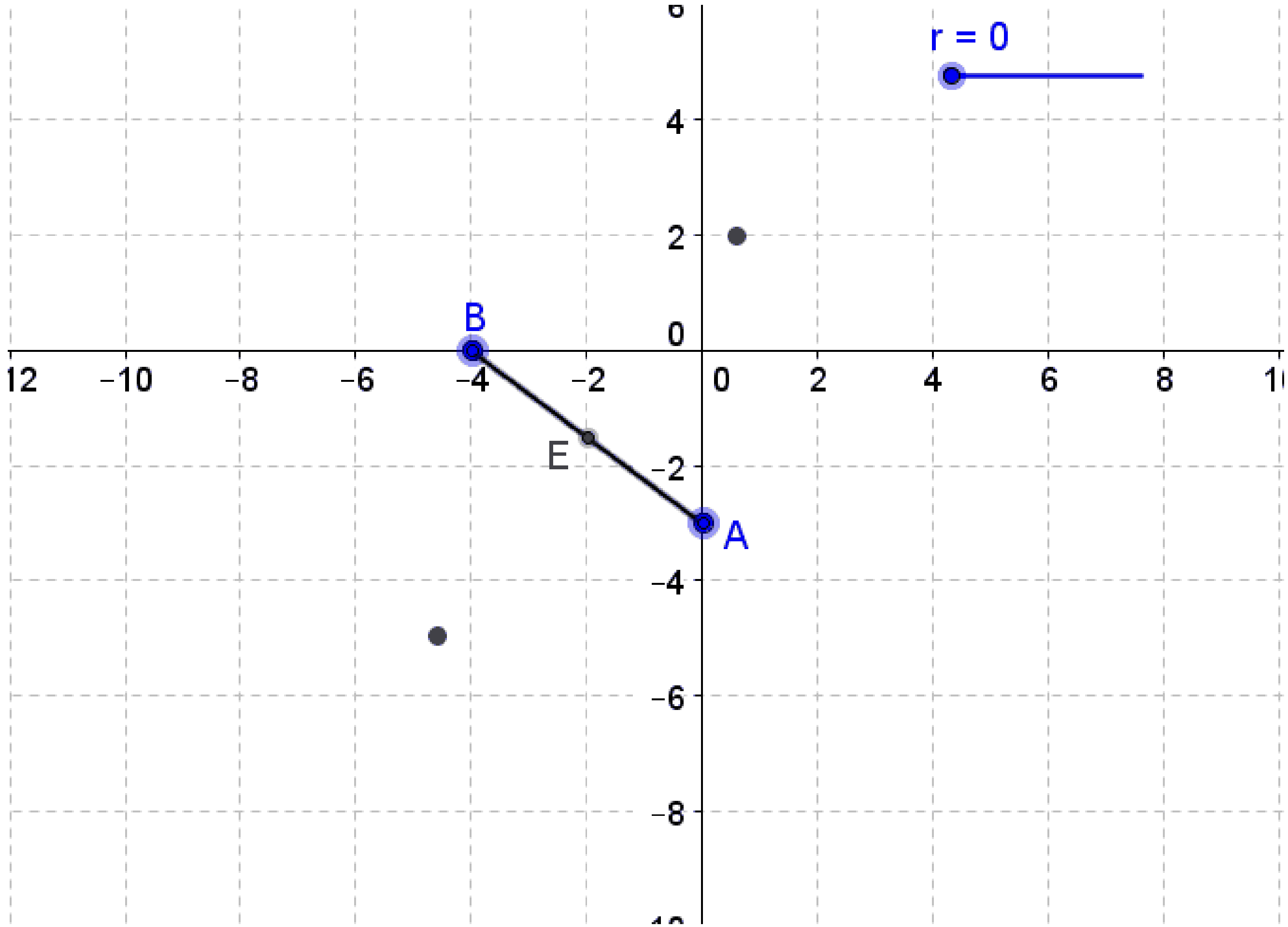
$$(y + 3 + y)(y + 3 - y) = (x + 4 + x)(x + 4 - x)$$

$$(2y + 3) \cdot 3 = (2x + 4) \cdot 4$$

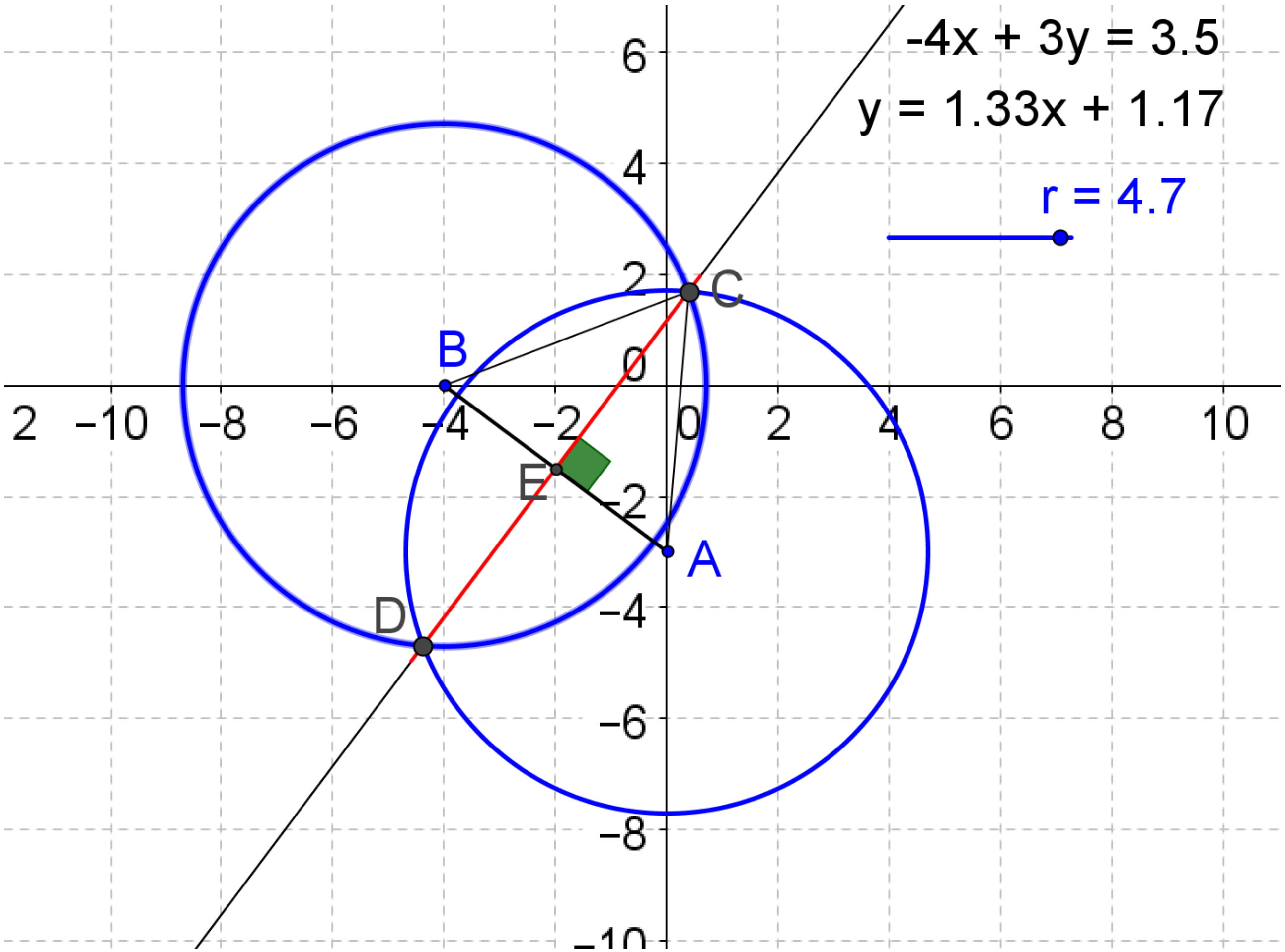
$$6y + 9 = 8x + 16$$

$$6y = 8x + 7; \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$$

Результаты работы групп



Результаты работы групп



Подведение итогов работы групп

Итог 1

Итак, решая одно и то же задание, мы получили различные интерпретации ответа:

1) Комплексное число вида $\boldsymbol{z = x + \left(\frac{4}{3}x + \frac{7}{6}\right)\mathbf{i}}$.
2) Линейная функция $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$.
3) Серединный перпендикуляр отрезку *AB,* где A (0; –3) и B (4; 0)

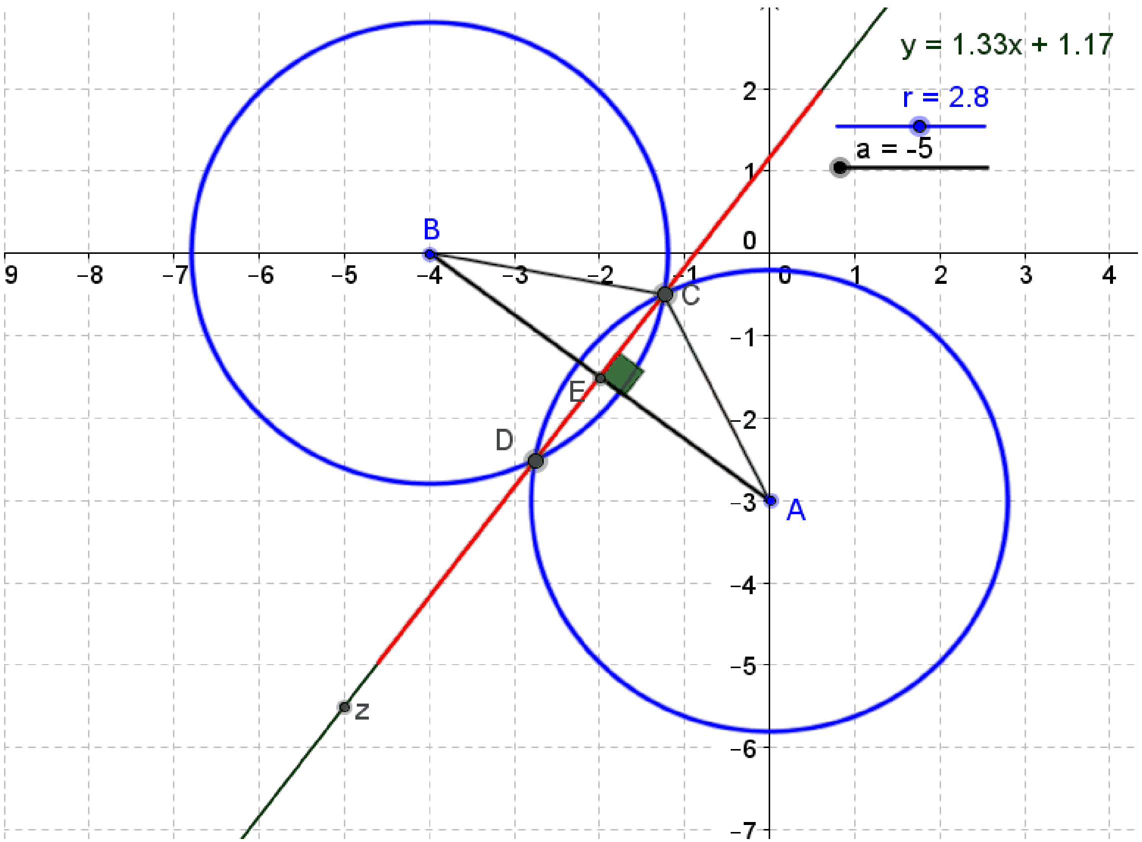
Как проверить правильность всех решений?

1. Можно использовать для проверки решений ИГС и результат работы группы 3.

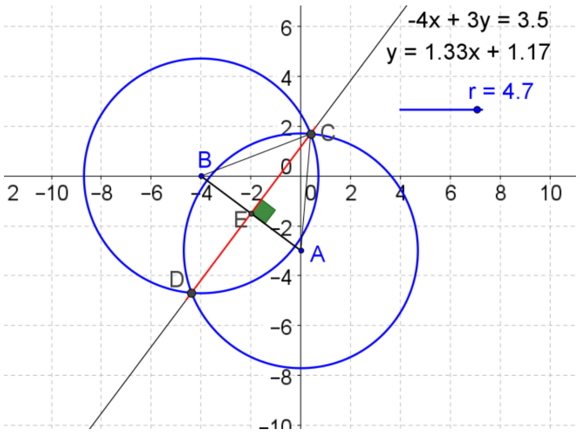
Проверим решение группы 1. Построим точку z. Изменяя значения параметра *a*, убеждаемся, что точка z лежит на серединном перпендикуляре.

Проверка решения группы 2. Введём в строку ввода $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$. Получим прямую, которая совпадёт с серединном перпендикуляре, построенным группой 3.

Подведение итогов работы групп



Подведение итогов работы групп



2. Можно найти уравнение серединного перпендикуляра в окне объектов и сравнить с результатом, полученным группами 1 и 2. В данном случае мы получаем приближенные значения коэффициентов.

Подведем итоги:

Первая и вторая группы решили задачу аналитически и получили точные ответы. Третья группа решила задачу геометрически, не получив точного ответа в аналитической форме.

Можно ли было третьей группе получить уравнение серединного перпендикуляра?

Итог 2

Какова роль ИГС в решении уравнения?

Результаты работы групп

Выведем уравнение серединного перпендикуляра .

Вопрос: совпадут ли полученное нами уравнение и уравнение серединного перпендикуляра в ИГС?

A(0;-3), B(-4;0). Составим уравнение прямой AB.

$y = k * x + m -$ линейная функция, график - прямая..

Составим систему: $\begin{cases} -3 = m \\ 0 = -4 \cdot k + m \end{cases}$;   k=$-\frac{3}{4}$ $y = -\frac{3}{4}x - 3$

Прямые перпендикулярны, значит, выполняется условие: $k_1 \cdot k_2 = -1$

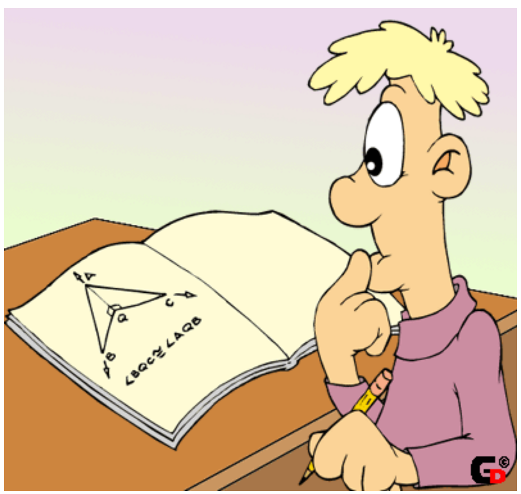
Получаем, что $k_2 = \frac{4}{3}$ E(-2;-1.5).

Тогда: $-\frac{3}{2} = -\frac{8}{3} + m$; $m = \frac{8}{3} - \frac{3}{2}$; m = $\frac{7}{6}$;

$\boldsymbol{y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{6};\quad 3y - \frac{4}{3}x + 3.5}$

Уравнения совпали.

Закрепление навыков решения уравнений с комплексными числами

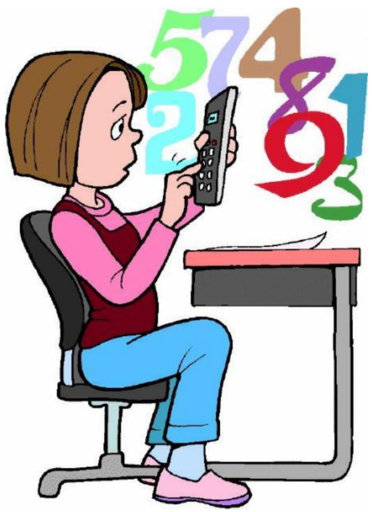


Самостоятельная работа.

Решить уравнение: $|z+4-2i| = |z+2-5i|$ [1]

Учащиеся первой группы решают задачу с использованием ИГС – изображают на координатной плоскости множество всех чисел z, удовлетворяющих данному уравнению и находят уравнение ГМТ; второй и третьей группы – первым и вторым способом соответственно.

Исследовательская работа



Решить уравнение: $|z - 3i| = \sqrt{2}|z - 6|$ [1]

Что изменилось в уравнении? Как вы думаете, получится ли такой же результат в задаче?

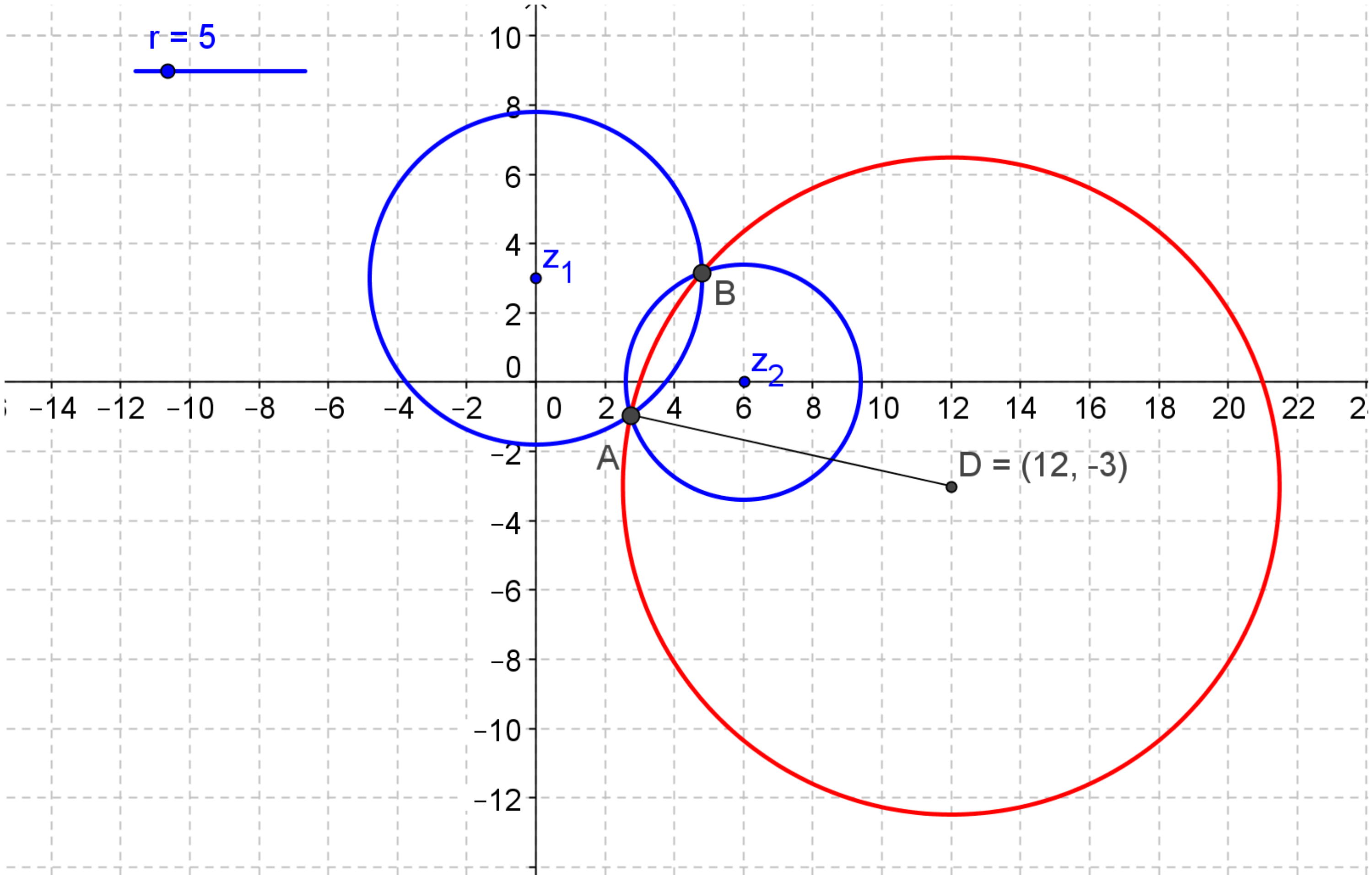
Проверим гипотезы в группах.

Группа 2 решает уравнение с помощью ИГС GeoGebra,

группа 1 и 3 – аналитически.

Цель исследования: Выяснить, что представляет множество всех чисел z, удовлетворяющих данному уравнению..

Результаты работы групп



Результаты работы групп

1 и 3 Группы

$|z-3i| = 2|z-6|$

Пусть $z = x + y \cdot i$

$|x + y \cdot i - 3i| = 2|x + y \cdot i - 6|$

$x^2 + (y-3)^2 = 2((x-6)^2 + y^2)$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 2(x^2 - 12x + 36 + y^2)$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 2x^2 - 24x + 72 + 2y^2$

$x^2 + y^2 - 24x + 6y + 63 = 0$

$(x^2 - 24x) + (y^2 + 6y) = -63$

$(x-12)^2 + (y+3)^2 = 90$ – уравнение окружности

$\boldsymbol{|z - 12 + 3i| = 3\sqrt{10}}$ – можно считать это уравнением окружности в комплексной области

Постановка проблемы

Уравнение $|z - z_1| = k|z - z_2|$.

Одинаково ли ГМТ для

случаев ***k=1 и k≠1***?

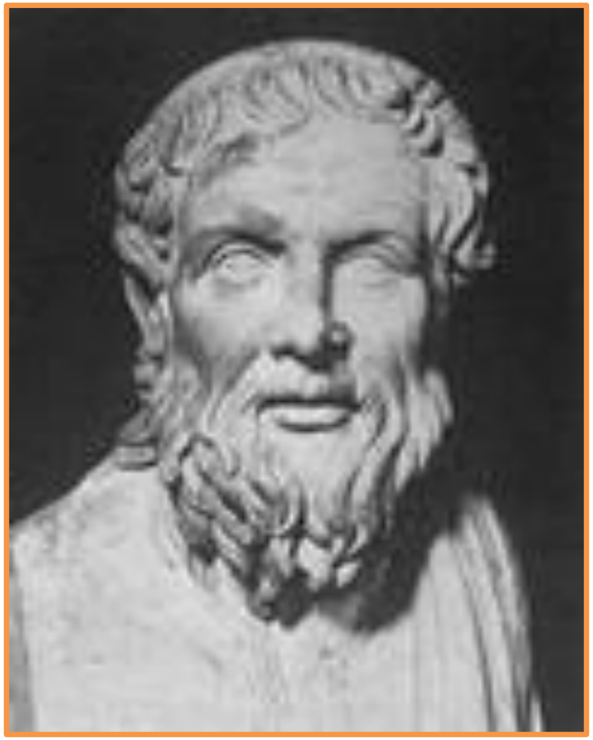
GeoGebra

Вывод

ГМТ, удовлетворяющих заданному условию, является окружность.

Полученная окружность называется – окружность Аполлония.

Историческая справка



Годы жизни (ок. 262-190 гг. до н.э.)

Древнегреческий ученый, величайший математик и астроном.

Доказал 387 теорем

Обобщил и развил теорию конических сечений.

Работал в Александрии при Птолемее III

Ввел термины эллипс, парабола, гипербола, асимптота, абсцисса, ордината, аппликата.

Обнаружил, что парабола – предельный случай эллипса

Нашел уравнение параболы

Открыл асимптоты гиперболы

Считается предшественником аналитической геометрии.

Разработал общую теорию эпициклов (астрономия).

Окружность Аполлония — геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух заданных точек — величина постоянная.

Итоги урока

Сегодня на уроке мы рассмотрели различные интерпретации решения уравнений вида: $|z - z_1| = k|z - z_2|$, $k \in R$, $z_1, z_2 \in C$.

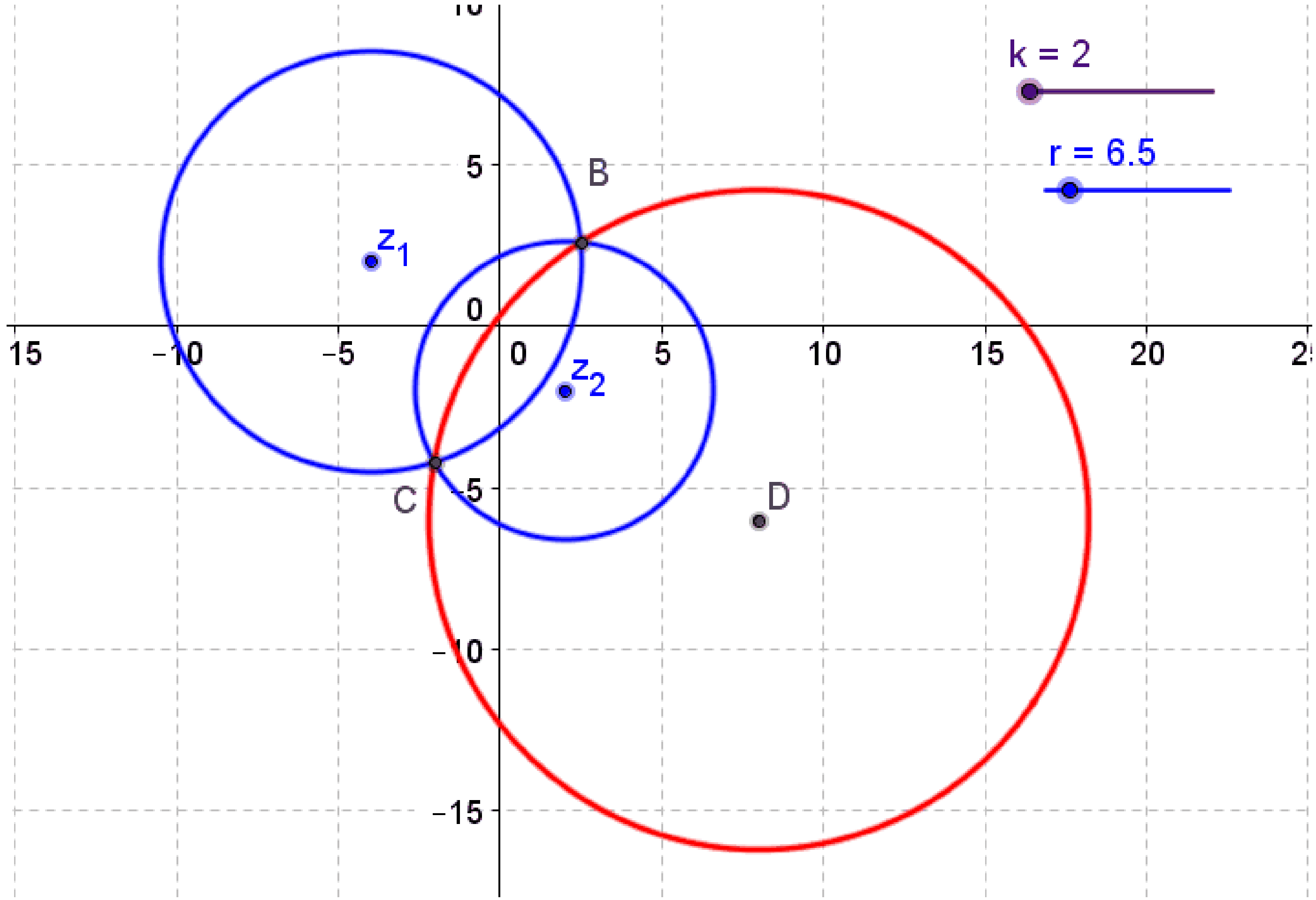
1) Если $k = 1$, то множеством всех чисел z, удовлетворяющих данному уравнению, является серединный перпендикуляр.
2) Если $k \neq 1$, то множеством всех чисел z, удовлетворяющих данному уравнению, является окружность Аполлония.
3) Уравнение можно решать на основе определения модуля комплексного числа и на основе ГМТ, удовлетворяющих условию $|z - z_1| = k|z - z_2|$.

Домашнее задание

Используя ИГС, построить модель для решения уравнения вида: $|z - z_1| = k|z - z_2|$.

GeoGebra

Домашнее задание



Литература

1. Глазков Ю.А. Комплексные числа. 9 – 11 классы. – М.: Издательство «Экзамен», 2012. – 157.
2. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа10 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень). – М.: Мнемозина, 2010. – 424.
3. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа 10 класс. Задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень). – М.: Мнемозина, 2010. – 342.
4. Нелин Е. П. , Лазарев В. А. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. – М.: Илекса, 2011. – 432.

Все чертежи в работе и презентации выполнены в программе GeoGebra

Методический приём

	I этап – поиск способа решения задачи и его защита	II этап – закрепление способа путем самостоятельного решения подобной задачи	III этап – исследование способов решений измененной задачи
1 группа	1 способ	3 способ, индивидуальная работа	2 способ
2 группа	2 способ	1 способ, индивидуальная работа	3 способ
3 группа	3 способ	2 способ. индивидуальная работа	1 способ

Спасибо за внимание!