Препринт статьи, направленной для публикации
в журнал «Математика и информатика»
Болгарской академии наук
http://mathinfo.azbuki.bg/

# Воспитание математика-экспериментатора, или Мягкий манифест экспериментальной математики

**Ястребов А.В., Шабанова М.В.**

**Аннотация.** Данная статья написана под влиянием трудов В. И. Арнольда, в которых он высказал мысль о возможности рассматривать математику как экспериментальную науку, а также доказал существование явлений, при описании которых «мягкие» модели имеют преимущество над «жесткими». Статья представляет собой своеобразный ответ на манифест, с которым выступил Р. В. Шамин, руководитель группы экспериментальной математики. Этим манифестом группа заявляет о появлении в математике нового раздела, который характеризуется самым широким использованием компьютерных экспериментов. В связи с тем, что средства и методы экспериментальной математики в последнее время стали все чаще привлекаться к обучению математике, авторы данной статьи посчитали необходимым опубликовать свой манифест. Статья призвана напомнить читателям о том, какое место занимали и занимают экспериментальные методы в математике и математическом образовании; показать положительные и отрицательные стороны того влияния на формирование стиля научного мышления школьников, которое может оказать привлечение к процессу обучения математике компьютерных экспериментов; призвать к разумному и осторожному их использованию как в математике, так и математическом образовании.

**Ключевые слова**: экспериментальная математика, математическое образование, экспериментально-теоретический разрыв, системы динамической геометрии, компьютерный эксперимент.

## 1. Экспериментальное и теоретическое начала математики и реалии школьного образования

Хорошо известно, что математика возникла из практических потребностей людей. Необходимость *пересчитывать* различные совокупности предметов привела к понятию *счета*. Необходимость собирать налоги постепенно привела к представлению о том, что к любому количеству собранного можно *добавить еще одну единицу* собираемого. Так формировалось представление о натуральном ряде и математическая дисциплина арифметика. Геометрия возникла из практики измерения земельных участков и нахождения объемов тел. Математический анализ делал первые свои шаги как физико-геометрическая наука. Чтобы убедится в этом достаточно вспомнить метод неделимых непрерывного Б. Кавальери (1598 – 1647) [1] или метод механических теорем Архимеда (287 до н.э. – 212 до н.э.) [2]. Теория вероятностей начиналась с анализа азартных игр. Доказательством этого является то, что одним из первых сочинений, относящихся к этой области математики, является работа Д. Кардано (1501 – 1576) «Книга об игре в кости». Статистика же первоначально носила название «Политическая арифметика», так как зародилась из потребности оценки состояния государственных дел. Свидетельством этому, например, является одноименная работа У. Петти (1623 – 1687), опубликованная после его смерти.

Подобное положение, характерное для многих ветвей математики, естественным образом привело к точке зрения, выраженной Дж. Фон Нейманом: «Наиболее характерная отличительная черта математики состоит в ее особом отношении к естественным наукам и вообще любой науке, интерпретирующей факты на уровне более высоком, чем чисто описательный» [3]. Весьма категоричная точка зрения принадлежит В. И. Арнольду: «Математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук» [4, с. 28]. Опуская анализ всего спектра взглядов на природу математики, констатируем, что *наблюдение и эксперимент сыграли существенную роль в ее возникновении*.

Естественный для педагога вопрос состоит в том, чтобы понять, в какой мере и в каких формах экспериментальное начало математики присутствует в образовании школьников.

Нашу версию ответа на этот вопрос начнем с анализа того, каким образом в начальной школе изучается переместительный закон сложения: $a + b = b + a$. Сначала школьники делают *наблюдение* над результатами сложений двух количеств однотипных объектов в различном порядке: 2 + 3 равно пяти, а 3 + 2 тоже, оказывается, равно пяти; 6 + 4 равно десяти, и 4 + 6 тоже равно десяти; и т.д. После серии испытаний, длина которой зависит от конкретной педагогической ситуации, формулируется *правило* о том, что от перестановки слагаемых сумма не меняется. Очевидно, что переместительный закон сложения представляет собой теоретический факт, однако он не доказан в том смысле, что он не выведен логически из общих положений. В силу малого возраста и опыта учащихся невозможно ни провести доказательство, ни сформулировать какие-либо общие положения, адекватные развитию детей. К счастью, с психологической точки зрения обсуждаемый факт прекрасно обоснован: его подтверждает огромное количество примеров, абсолютная невозможность привести контрпример, а главное, полное отсутствие потребности в поиске контрпримеров. Таким образом, *теоретический* факт обоснован *экспериментально*.

Другим примером использования экспериментальных методов в обучении математике является введение правила нахождения неизвестного слагаемого в начальной школе на основе интуитивных представлений учащихся об основном свойстве измерения отрезков и опыте решения задач на нахождении длины части отрезка по длине целого отрезка и известной части (рис. 1).

$$x + a = b$$
$$x = b - a$$

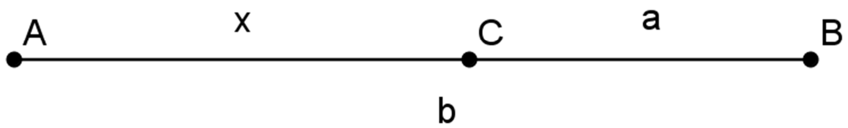


Рисунок 1.

Еще одним ярким примером является введение в 6 классе правила переноса слагаемого из одной части уравнения в другую, которое обосновывается с помощью модели весов (рис. 2).

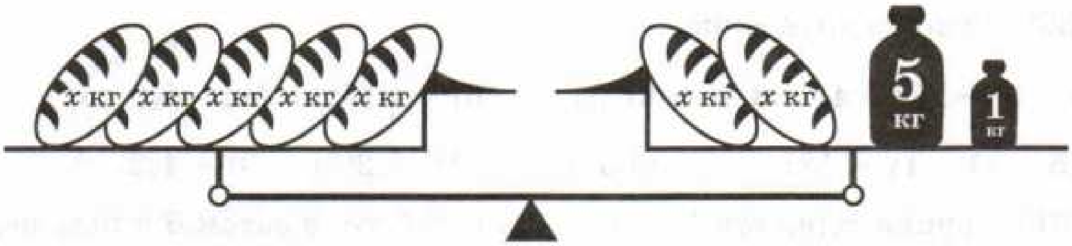


Рисунок 2.

Весьма важно, что такое соотношение экспериментального и теоретического начал характерно для первых лет обучения математике. Перечислим еще несколько фактов, изучаемых в том же стиле: 1) сочетательный закон сложения (умножения); 2) переместительный закон умножения; 3) распределительный закон умножения относительно сложения; 4) правило прибавления нуля; 5) правило умножения на единицу; 6) правило умножения на нуль; 7) правило нахождения неизвестного вычитаемого (уменьшаемого, делителя, делимого); 9) правило сложения (умножения, деления) в столбик; 10) правило сложение (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями; 11) основное свойство обыкновенной дроби. Перечень это далеко не полон, однако он позволяет сформулировать следующее утверждение: *с первого по шестой класс освоение математики осуществляется преимущественно* ***экспериментальными*** *методами.*

Здесь уместно вспомнить известную мысль Дж. Брунера: «Школьник, изучающий физику, *является* физиком, и для него легче изучать науку, действуя подобно ученому-физику» [5]. (Курсив Брунера.) Естественно предположить, что освоение математики экспериментальными методами формирует у школьников и конкретные навыки, и менталитет математика-экспериментатора.

Интересно, что школьник, обладающий первичными навыками математика-экспериментатора, подвергается в седьмом и последующих классах суровому испытанию – освоению теоретического компонента математики. В седьмом классе начинают формироваться представления о том, что одни утверждения могут быть *выведены* из других утверждений чисто *логическим* путем. Возникают такие понятия, как *аксиома* и *теорема*. В связи с понятием теоремы оказываются необходимыми новые понятия: *условие теоремы, заключение теоремы, доказательство теоремы*. В связи с понятием доказательства возникает представление о *методах доказательства*, и начинают накапливаться конкретные методы: *метод тождественных преобразований* в алгебре, *метод дополнительных построений* в геометрии, общенаучный *метод от противного* и т.д.

Естественно, что *частично сформированные* навыки математика-экспериментатора взаимодействуют с *формирующимися* навыками математика-теоретика. Инерция мышления, которая сама по себе неизбежна, необходима и во многих случаях позитивна, приводит к тому, что поначалу такое взаимодействие носит характер противодействия. Быть может, трудности многих школьников при освоении геометрии обусловлены именно тем, что в предшествующие годы они хорошо усвоили стиль мышления математика-экспериментатора. Тем не менее, традиционное, «докомпьютерное» изучение математики в школе достаточно гармонично в том смысле, что, несмотря на все трудности, к концу изучения математики в основной школе большинство учащихся принимает как элементы аксиоматического метода изложения, так и конкретные геометрические факты, полученные в его рамках.

Теперь обратимся к инновационному «компьютерному» изучению математики, которое представим как привлечение, в той или иной степени, компьютерных визуализаций и компьютерных экспериментов к введению положений, к постановке и решению математических задач. Возможности для реализации такого подхода сегодня предоставляет целый класс программных продуктов образовательного и научного назначений, которые получили обобщенное название «системы динамической геометрии». К их числу относятся такие известные программные продукты как Cabri-geometre, 1985; The Geometer's Sketchpad, 1989; GeoNext, 1999; GeoGebra, 2002; 1С: Математический конструктор, 2006; и другие (указан год начала выпуска программы). Сегодня общее количество программных продуктов этого класса превысило 50 наименований. Их возможности не ограничиваются геометрией. Они позволяют поддерживать учебную деятельность, относящуюся ко многим разделам математики: элементарная алгебра, тригонометрия, векторная алгебра, математический анализ, теория графов, теория вероятностей и математическая статистика т.п.

Привлечение компьютеров к изучению математики порождает ряд вопросов. Сформулируем некоторые из них. Какую роль играют системы динамической геометрии в освоении математики (и геометрии, в частности)? Какой должна быть методика использования систем динамической геометрии для гармоничного освоения школьниками обоих компонентов математики, теоретического и экспериментального? Следующий раздел будет посвящен ответу на эти вопросы.

## 2. Некоторые рамочные условия использования систем динамической геометрии

Цель создания систем динамической геометрии (DGS) состояла в том, чтобы ввести в процесс обучения геометрии возможность постановки математических экспериментов, с помощью которых школьники обучались бы формулировке гипотез о свойствах геометрических фигур и их последующей проверке. Сразу скажем, что эта цель была с блеском достигнута, о чем свидетельствуют результаты многочисленных исследований, проводимых учеными разных стран (A. Mariotti [6], В. И. Рыжик [7], C. Laborde [8], Th. Gawlick [9], М. В. Шабанова [10] и многие др.). Одновременно с этим ярко проявились и негативные эффекты использования DGS. Они описаны авторами в статье [11]. Наиболее важный из них получил в литературе название *экспериментально-теоретического разрыва*. Основное его проявление состоит в том, что у школьников резко падает мотивация к проведению дедуктивных доказательств, которая влечет за собой целый ряд негативных следствий: уменьшение способности к дедуктивным рассуждениям, падение интереса к теоретическому поиску, трудность или даже невозможность постановки новых задач путем логического преобразования решенной задачи и т.д.

*Покажем, что возникновение экспериментально-теоретического разрыва было вполне предсказуемым, а в отсутствие превентивных мер и неизбежным.* Для этого обратимся поначалу к понятию доказательства.

Математик и лингвист В. А. Успенский пишет, что термин «доказательство» – один из самых главных в математике – не имеет точного определения. Это не удивительно, поскольку «понятие доказательства не принадлежит математике (математике принадлежит лишь его математическая модель – формальное доказательство). Оно принадлежит логике, лингвистике и больше всего – *психологии*» [12, с. 441]. Там же Успенский приводит описание данного термина, раскрывающее его основную психологическую функцию: «Доказательство – это *убедительное* рассуждение, убеждающее нас настолько, что с его помощью мы способны убеждать других.» (Курсив всюду наш. – Авторы.)

Отталкиваясь от выделенных курсивом нематематических слов «психология» и «убедительный», проанализируем эффект использования DGS при изучении классических теорем геометрии. Для примера рассмотрим теорему о медианах треугольника.

Представим себе компьютерный класс оснащенный той ли иной DGS. (Для определенности в дальнейшем мы будем рассматривать GeoGebra.) С ее помощью легко обнаружить, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. В компьютерном классе это наблюдение мгновенно проверяется *на многих сотнях* треугольников, причем каждым учащимся лично. Даже если кто-то захочет привести контрпример, это почти наверняка ему не удастся. Каждый учащийся и класс в целом попадает *в ту же самую* ситуацию, в которой они оказывались многократно при изучении законов сложения, законов умножения и т.д. Тождество ситуаций включает уже существующие механизмы мышления математика-экспериментатора, и учащиеся приходят к выводу, что сделанное наблюдение истинно. Тем самым с психологической точки зрения утверждение о медианах оказывается настолько убедительным, что не нуждается в дальнейшем дедуктивном обосновании.

Так возникает экспериментально-теоретический разрыв. Повторимся: причина его в том, что частично сформированные навыки математика-экспериментатора взаимодействуют с формирующимися навыками математика-теоретика и поначалу противодействуют их формированию.

*Для того чтобы избежать негативного влияния DGS на процесс обучения, педагогам придется предпринять специальные усилия, причем как на уровне общих методологических установок, так и на уровне методов педагогического воздействия на учащихся.*

***Методологические установки.*** Прежде всего, учителям придется осознать равноправие экспериментального и теоретического начал в математике. Им придется признать, что на всех этапах развития математического знания эти начала сосуществуют и взаимодействуют, являясь составляющими общего стиля математического мышления. В процессе обучения математике придется учитывать, что становление этих составляющих у учащихся происходит в диалектическом единстве. Это приводит к выводу, что включение в процесс обучения DGS в качестве инструмента учебной деятельности необходимо осуществлять, опираясь на *принцип накопительной эволюции*. Остановимся на нем более подробно.

Впервые принцип накопительной эволюции был сформулирован в работе [13] применительно к конструированию электронных задачников, то есть к области, достаточно далекой от темы данной статьи. Переформулируем его применительно к нашей теме: *использование DGS должно а) сохранять все достоинства лучших образцов традиционного, «докомпьютерного» обучения; б) устранять некоторые недостатки традиционного обучения; в) давать преподавателю дополнительные инструменты педагогического воздействия, порождаемые возможностями компьютера*.

Для реализации всего вышесказанного педагогическому сообществу придется использовать некоторые специальные *методы*, которые можно трактовать и как методы обучения школьников, и как методы самообучения учителей. Кратко опишем некоторые из них.

***Предупреждение иллюзий.*** Приведем несколько математических задач и обсудим их с нескольких точек зрения: с точки зрения математики, с точки зрения педагогики математики, с точки зрения изучения возможностей инструментов GeoGebra. Первую задачу целесообразно давать в самом начале знакомства с GeoGebra.

**Задача 1.** Отметить в графическом окне GeoGebra две точки: $O = (0, 0)$ и $A = (0.000000000000001, 0)$. Найти расстояние между этими точками.

***Обсуждение.*** Для выполнения этого задания необходимо внести изменения в настройки GeoGebra, задать округление значений до 15 знака после запятой. При построении точек придется воспользоваться строкой ввода, а для измерения расстояния между зрительно неразличимыми точками – инструментом «Расстояние или длина», которым указываются точки на панели объектов. Получим ответ: $OA = 0.000000000000001 = 10^{-15}$ см. С формальной точки зрения все хорошо, однако полученное расстояние в 1000 раз меньше, чем *линейные размеры атомного ядра!* В настоящее время не существует приборов для измерения таких расстояний, да и в обозримом будущем они не появятся. Получается, что GeoGebra занимается отнюдь не той евклидовой геометрией, которая представлена в школьных учебниках. На самом деле она занимается вычислительной геометрией арифметической плоскости $\boldsymbol{R}^2$, представляет ее объекты (то есть пары чисел, линейные уравнения и проч.) в виде объектов евклидовой геометрии и изображает их на дискретном экране, разрешение которого не столь уж велико.

Так в сознании неопытного пользователя предупреждается возникновение *иллюзии о чистой геометричности* GeoGebra. Разумеется, опытный пользователь знает, что арифметическая плоскость $\boldsymbol{R}^2$ является изоморфной моделью аксиоматически построенной евклидовой геометрии, однако школьника вряд ли можно отнести к этой категории.

Вторую задачу целесообразно давать *до знакомства с теоремой Пифагора*.

**Задача 2.** 1) Найдите диагональ $x$ квадрата со стороной 1 см и диагональ $y$ прямоугольника со сторонами 3 см и 4 см. 2) Два квадрата со стороной 1 см разрежьте по диагонали и поместите четыре половинки в новый квадрат, сторона которого равна диагонали исходного квадрата. Вычислите площадь нового квадрата двумя способами. 3) Два прямоугольника со сторонами 3 см и 4 см разрежьте по диагонали и поместите четыре половинки в новый квадрат, сторона которого равна диагонали исходного прямоугольника. Вычислите площадь полученного квадрата двумя способами.

***Обсуждение.*** 1) Найти длину отрезка возможно двумя способами: либо с помощью измерений, либо по одной из известных формул. Поскольку формулы неизвестны учащимся, придется воспользоваться инструментами GeoGebra. В результате при стандартных настройках точности получаем следующие ответы: диагональ квадрата равна 1.41 см, а диагональ прямоугольника равна 5 см.

Казалось бы, задача решена, однако дальнейшие действия выявляют некоторые странности. Действительно, если мы выберем округление до трех знаков, то получим, что диагональ квадрата равна 1.414 см, а если выберем округление до четырех знаков, то она окажется равной 1.4142. Уже само наличие трех разных ответов говорит о том, что инструменты GeoGebra не дают ответа на поставленный вопрос, так что нам придется использовать какие-либо содержательные соображения. Еще интереснее следующее: диагональ прямоугольника при *любом* способе округления оказывается постоянной и равной 5 см! Почему же GeoGebra в одной ситуации не дает точного результата, а в другой, весьма похожей ситуации, дает его? Для ответа на этот вопрос придется работать с пунктами 2 и 3 нашей задачи.

2) Квадрат на рисунке 4 составлен из четырех непересекающихся прямоугольных треугольников с катетами 1 см, поэтому его площадь можно вычислить двумя способами: $S = x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$. Отсюда следует, что диагональ исходного квадрата удовлетворяет равенству $x^2 = 2$. Заметим, что ни один из трех полученных ранее ответов не удовлетворяет ему, ни 1.41, ни 1.414, ни 1.4142. Так школьники сталкиваются с той же самой дилеммой, с которой столкнулся Пифагор. Правда, в отличие от Пифагора они могут получить подсказку, используя поле CAS GeoGebra. Инструмент «Решить» позволит получить им два корня данного уравнения, записанных с использованием пока неизвестных символов: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ . Учащимся еще предстоит выяснить, что означает новый символ и который из двух корней является решением задачи.

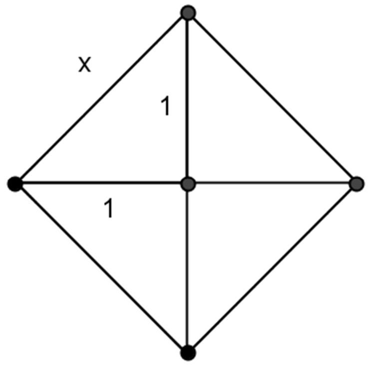


Рисунок 4.

3) Квадрат на рисунке 5 составлен из четырех прямоугольных треугольников с катетами 3 см и 4 см и квадрата со стороной 1см, поэтому его площадь можно вычислить двумя способами: $S = y^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + 1^2$. Отсюда следует, что $y^2 = 25$ и $y = 5$. Получается, что неизменность этого ответа при изменении точности вычислений не была случайностью.

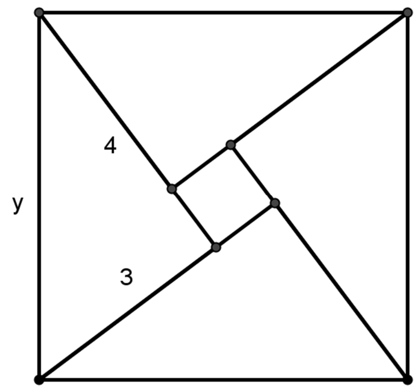


Рисунок 5.

Заметим, что рисунок 5 встречается в египетских гробницах, созданных, по крайней мере, за 2000 лет до нашей эры.

Из решения задачи 2 можно сделать два разнохарактерных вывода. Во-первых, с точки зрения математики можно воспользоваться предлагаемыми задачами в качестве пропедевтики изучения теоремы Пифагора и понятия иррационального числа или даже использовать их в процессе изучения, как это предложено в статье [14]. Во-вторых, и это главное для наших целей, учащиеся самостоятельно или почти самостоятельно приходят к следующему выводу: «измерения» GeoGebra, как и всякого инструмента, являются *приближенными* и нуждаются в аналитическом осмыслении со стороны пользователя. Так предупреждается возникновение *иллюзии об абсолютной надежности выводов, сделанных на основе инструментов* GeoGebra.

***Воспитание мировоззрения экспериментатора.*** Стало общепризнанным утверждение о том, что обучение математике призвано формировать научное мировоззрение учащихся. Покажем, как решение простых задач способствует формированию мировоззрения математика-экспериментатора.

**Задача 3.** Учащемуся предлагают объяснить результаты следующих экспериментов. В графическом поле GeoGebra нарисована одна точка и напечатан текст вопроса: «Сколько точек изображено на рисунке? Каковы их координаты?» Такой рисунок и такой вопрос предлагается *четыре раза*.

***Обсуждение.*** Парадоксальность начинается с того, что точка на рисунке единственна, а вопрос поставлен во множественном числе. Парадоксальность продолжается, когда на экран выводится панель объектов, потому что для каждого из случаев она имеет свой особый вид:

| **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|
| $A(1, 2)$ | $A(1, 2)$<br>$B(1.01, 2)$<br>$C(1, 2.01)$ | $A(1, 2)$<br>$B(1, 2)$<br>$C(1, 2)$ | $A(1, 2)$<br>$B(1, 2)$<br>$C(1, 2)$ |

*В первом случае* естественно решить, что на чертеже действительно изображена одна точка. *Во втором случае* окажется, что точек три, просто они расположены столь близко, что для глаза их изображения сливаются, а суммарное изображение выглядят, как одна точка. *Третий случай* похож на первый. Непонятно только, почему одна точка выступает под тремя разными именами. Однако если настроить чертеж на округление до большего числа десятичных знаков, то координаты точек меняются и становятся такими: $A(1, 2)$, $B(1.001, 2)$, $C(1, 2.001)$. Получается, что на чертеже изображены три точки, расположенные еще ближе друг к другу, чем во втором случае. *Четвертый случай,* на первый взгляд, совпадает с третьим, однако увеличение точности округления не изменяет координат. Получается, что одна точка действительно выступает под разными именами. Это может происходить по той причине, что три точки, *изначально разные,* движутся по плоскости и в какой-то момент *совпадают*. Именно этот момент и зафиксирован на четвертом рисунке.

Эта и подобные задачи формируют у школьника убеждение, служащее ***основой мировоззрения математика-экспериментатора:*** *любое наблюдение, даже над самыми простыми объектами, нуждается в теоретическом осмыслении.* Тем самым выявляется важное дуалистическое свойство математики – ее экспериментально-теоретический дуализм (это свойство естественно рассматривать в его взаимосвязи с более общим свойством – эмпирико-теоретическим дуализмом [15]).

***Учет стимулирующего воздействия чертежей.*** Естественно считать, что чертежи античных математиков побуждали их создателей к дальнейшим исследованиям, и это стимулирующее воздействие было достаточно мощным. Действительно, чертежи выполнялись в лучшем случае на папирусе, то есть на не очень ровном шероховатом материале небольшого размера. Они выполнялись с помощью заточенного стебля тростника, вследствие чего линии имели достаточно большую толщину. В результате чертеж имел противоречащие друг другу свойства: с одной стороны, он помогал сформулировать гипотезу о свойствах изучаемых геометрических объектов, а с другой стороны, не давал никакой уверенности в том, что она соответствует действительности. В этих условиях дедуктивное доказательство было единственным способом установления истины.

Чертежи GeoGebra многократно точнее чертежей античности, да еще и обладают свойством динамичности, что позволяет не только формулировать гипотезу, но и проверять ее на множестве частных случаев. Парадоксально, но именно точность чертежей сильно уменьшает их стимулирующее воздействие, о чем мы говорили выше. В этих условиях естественным направлением деятельности учителя является создание ситуаций, в которых стимулирующее воздействие чертежей GeoGebra будет не меньшим, чем у чертежей древних. Покажем, что *разные чертежи* стимулируют дальнейшие исследования *в разной степени*.

**Задача 4.** 1) Постройте три медианы треугольника и сформулируйте гипотезу об их взаимном расположении. 2) Измерьте три угла треугольника, сложите их и сформулируйте гипотезу об их сумме.

***Обсуждение.*** 1) При построении медиан невооруженным глазом виден *красивый* результат: медианы треугольника пересекаются в одной точке. Если найти их попарные пересечения, то три полученные точки будут иметь одинаковые координаты, то есть совпадать. Увеличение точности вычисления, скажем, до пяти знаков, подтверждает сделанное наблюдение. *Парадоксальные* результаты обнаруживаются только тогда, когда точность вычисления становится предельной, равно 15 знакам. Они состоят в том, что для многих треугольников попарные пересечения медиан оказываются *различными* точками. Очевидно, что такой чертеж стимулирует дальнейшие исследования с помощью дедуктивного метода. Впрочем, очевидно и другое: для выявления парадоксальных результатов требуются специальные усилия учителя.

2) При измерении суммы углов треугольника получается абсолютно стабильный, инвариантный результат в $180^{\circ}$, причем при любой точности вычислений. Гипотеза, порожденная такими результатами, выглядит полностью обоснованной и вряд ли стимулирует дальнейшее исследование с помощью дедуктивного доказательства.

Разумеется, обсуждаемые задачи представляют собой лишь отдельные примеры, список которых нуждается в дальнейшем расширении, в распространении на разные разделы геометрии, в экспериментальной проверке их педагогической эффективности и т.д. Тем не менее, уже на данном уровне обсуждения авторы позволят себе сформулировать некоторые рекомендации по воспитанию математика-экспериментатора и уменьшению или даже устранению экспериментально-теоретического разрыва.

***Первая рекомендация*** носит характер общей идейной установки: при изучении геометрии с помощью DGS целесообразно формировать взвешенное отношение к этой среде, то есть формировать *одновременно и в равной мере* как доверие к «подсказкам» DGS, так и сомнение в их истинности.

***Вторая рекомендация*** более категорична: применение DGS следует начинать с тех ситуаций, когда она *подсказывает*, как сформулировать гипотезу, но *не порождает убежденность* в их истинности.

### 3. Мягкий манифест экспериментальной математики

Впервые термин «экспериментальная математика» был произнесен, по воспоминаниям академика Н. Н. Красильникова, в 1969 г. на открытии Уральского отделения Академии Наук СССР. Сегодня отношение к этому термину различное. Одни ученые полагают, что он является лишь новым брендом (Mark McEvoy [16]), другие считают, что он обозначает новый раздел математики. Например, на сайте [17] был опубликован «Манифест экспериментальной математики», подготовленный в 2008 г. группой экспериментальной математики, состоящей из специалистов Института океанологии им. П. П. Ширшова и Российского университета дружбы народов.

Интересно, что «Манифест…» [17] достаточно «жестко» очерчивает границы экспериментальной математики как области исследований и ничего не говорит об использовании методов экспериментальной математики в образовании. Между тем было бы естественным объединить усилия широкого круга специалистов как в области математики, так и в области педагогики математики для понимания меняющейся роли экспериментального компонента математики.

Выше мы говорили об использовании методов экспериментальной математики в математическом образовании, то есть о явлении, относительно новом для педагогики математики. Как обычно, у него есть сторонники и противники, энтузиасты и скептики. При этом и трезвые энтузиасты, и честные скептики понимают, что экспериментальная математика имеет серьезные, но не грандиозные достижения, а ее использование в педагогике математики приносит несомненную пользу, но наталкивается на определенные трудности. Именно поэтому мы полагаем, что педагогико-математическое сообщество нуждается в некоем тексте, своего рода «мягком» манифесте, который принимался бы многими специалистами. Ниже мы предпринимаем попытку его написания.

Хорошо известно, что математика, как и всякая наука, имеет двойственную природу. С одной стороны, она представляет собой деятельность по получению нового знания в своей специфической области, а с другой стороны, она является суммой знаний, накопленных к данному моменту. Из этого следует, что в процессе преподавания математики на всех уровнях целесообразно добиваться от студентов и школьников как усвоения математических фактов, так и овладения исследовательскими умениями в области математики, причем то и другое должно происходить *одновременно и в равной мере*. В частности, процесс обучения должен включать в себя математические эксперименты, поскольку математика в процессе своего становления была наукой экспериментальной и до настоящего времени сохранила оба свои начала, теоретическое и экспериментальное.

*Деятельность исследователя с объектами материального мира или их идеальными образами будем относить к области* ***экспериментальной математики****, если ее результатами являются гипотезы о свойствах математических объектов и/или математические предпонятия или понятия.*

В разное время и у разных народов существовали различные инструменты проведения математических экспериментов. К ним относятся кубики для игры в кости, игральные карты и монеты; квадратные листы бумаги для оригами; реальные циркуль, линейка и папирус, а впоследствии бумага; идеальные циркуль и линейка; транспортир, двусторонняя линейка и шаблон прямого угла; компьютер и т.д.

Среди инструментов, с помощью которых ставятся математические эксперименты, особая роль принадлежит компьютеру. Его возможности в постановке экспериментов настолько велики, с его помощью получены настолько интересные и разнообразные результаты, что в последнее время стали говорить о *возникновении* экспериментальной математики как об особой области математики и об *отождествлении* математического эксперимента с компьютерным экспериментом. По-видимому, слова «возникновение» и «отождествление» представляют собой некую гиперболу и в этом смысле не точны, однако они отражают новую реальность – резкое возрастание роли экспериментального компонента математики.

Важно, что математические эксперименты стали активно использоваться в сфере образования. Цифровые образовательные ресурсы позволяют организовать математический эксперимент в рамках реального учебного процесса. Это обстоятельство породило сильные позитивные эффекты, с одной стороны, и выявило серьезные риски, с другой стороны.

Перед математическим и педагогическим сообществами стоит благородная цель – научиться использовать экспериментальные методы для развития математики и педагогики математики.

**Библиографический список**


1. *Кавальери Б.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного [Текст] / Перевод со вступительной статьей и примечаниями С. Я. Лурье. М.–Л.: Изд. технико-теоретической литературы, 1940. – 414 с.
2. *Архимед.* Сочинения [Текст] / пер. Ю. Н. Веселовского, Б. А. Розенфельда. – М.: Физматлит, 1962. – 640 с.
3. *Нейман, Дж. фон.* Математик [Текст] // Природа. – 1983. – № 2. – С. 88–95.
4. *Арнольд, В. И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели [Текст]. – М.: МЦНМО, 2000. – 32 с.

5. *Брунер, Дж.* Процесс обучения [Текст]. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. – 84 с.
6. *Mariotti A. M.* Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment // Educational Studies in Mathematics, 44(1), 2000. – pp. 25–53.
7. *Рыжик В. И.* Геометрия и компьютер [Текст] // Компьютерные инструменты в образовании. – 2000. – № 6. – С. 7–11.
8. *Laborde, C.* Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry // International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6(3), 2001. – С. 283–317.
9. *Gawlick, Th.* Connecting Arguments to Actions – Dynamic Geometry as Means for the Attainment of Higher van Hiele Levels. ZDM, 37(5), 2005. – С. 361-370.
10. *Шабанова М. В., Безумов, О. Л., Ерилова, Е. Н* и др. Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra [Текст]: коллективная монография. – М.: Перо, 2013. – 128 с.
11. *Shabanova, M., Yastrebov, A., Bezumova, O., Kotova, S., Pavlova, M.* Experimental mathematics and mathematics education//International Multidisciplinary scientific conferences on social sciences and arts: psychology and psychiatry, sociology and healthcare, education. Conference proceedings – Volume III – Sofia, Bulgaria, 2014. – С. 309 – 320.
12. *Успенский, В. А.* Апология математики [Текст]. – СПб.: Амфора, ТИД Амфора, 2011. – 554 с.
13. *Ястребов, А. В., Завьялова, И. В.* Принцип накопительной эволюции как основа конструирования электронного задачника [Текст] // Проблемы преподавания математики в школе и вузе в условиях реализации новых образовательных стандартов: Тезисы докладов участников XXXI Всероссийского семинара преподавателей математики высших учебных заведений, посвященного 25-летию семинара (26–29 сентября 2012 г., г. Тобольск). – Тобольск: ТГСПА им. Д. И. Менделеева, 2012. – С. 208–209.
14. *Рожкова, С. А., Ястребов, А. В.* Педагогико-математические следствия применения метода площадей [Текст] / Сб. «Математика, физика, экономика и технология и совершенствование их преподавания»: Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. Часть II. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – С. 79–86.
15. *Ястребов, А. В.* Дуалистические свойства математики и их отражение в процессе преподавания [Текст] // Ярославский педагогический вестник. – 2001. – № 1. – С. 48–53.
16. *McEvoy, M.* Experimental mathematics, computers and the a priori, Philosophical research online, Synthese 190, Netherlands, pp. 397–412, 2013.
17. *Шамин, Р. В.* Манифест Экспериментальной математики [Электр. ресурс] URL: http://xmath.ru

**Ястребов Александр Васильевич**,
профессор, доктор педагогических наук,
Ярославский государственный педагогический
университет имени К.Д. Ушинского
**E-mail**: a.yastrebov@yspu.org
**Шабанова Мария Валерьевна,**
профессор, доктор педагогических наук,
Северный (Арктический) Федеральный
университет имени М.В. Ломоносова
**E-mail**: m.shabanova@narfu.ru