



Конкурс «Математика и проектирование»

**Номинация: «Математические модели
реальных процессов в природе и обществе»**

**Тема: «Определение траектории движения
спутников»**

Выполнил:

ученик 7 «А» класса

МБОУ МО «г. Архангельск»

«Гимназия № 3 им. К. П. Гемп»

Кучерин Георгий Дмитриевич – Kucherin Georgiy

Научный руководитель:

Павлова Мария Александровна – Pavlova Maria

Руководитель кружка «Экспериментальная математика» для 7-9 классов на базе
ИМИКТ САФУ имени М.В. Ломоносова,

телефон: +79539380846,

e-mail: maria070583@mail.ru

Введение

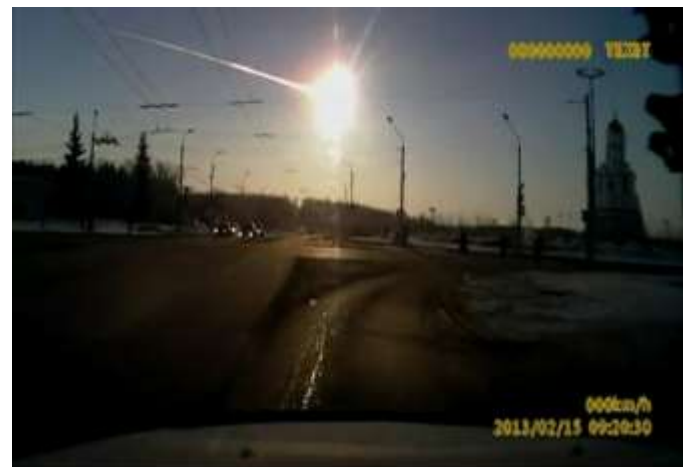
В курсе физики 7 класса мы познакомились с **явлением гравитации**. Оно заключается во взаимном притяжении всех тел во Вселенной [8, с. 4].

Этим явлением:

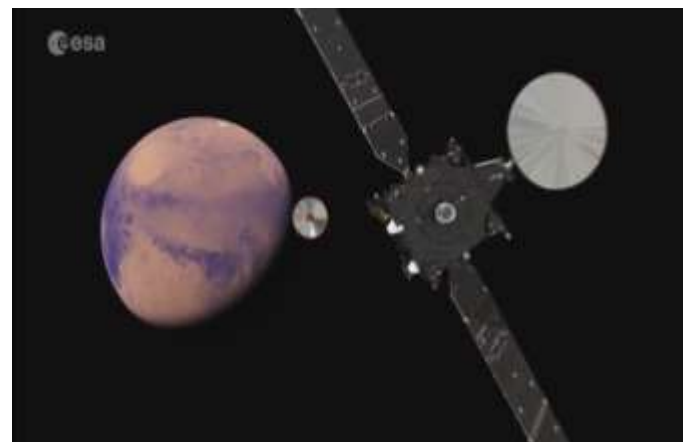
- обусловлены движения космических тел по их орбитам и изменения орбит;
- объясняется падение метеоритов;
- пользуются ученые при запуске ракет и искусственных спутников.



29.03.2016 г. шведские ученые заявили о существовании в Солнечной системе неизвестного космического тела, которое они назвали Гна.



Падение метеорита в Челябинске 15.02.2015 г.



ExoMars-2016 г.

Введение

Теория гравитации Исаака Ньютона. Закон всемирного тяготения

Природа гравитации (по Ньютону)

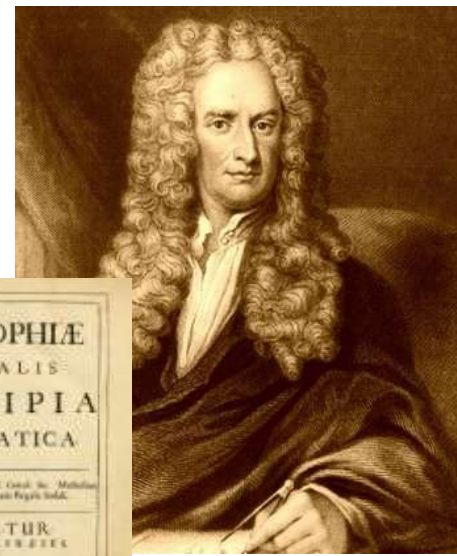
- Поле гравитации (поле притяжения) считается безграничным, его создают все тела, обладающие массой.

Закон всемирного тяготения

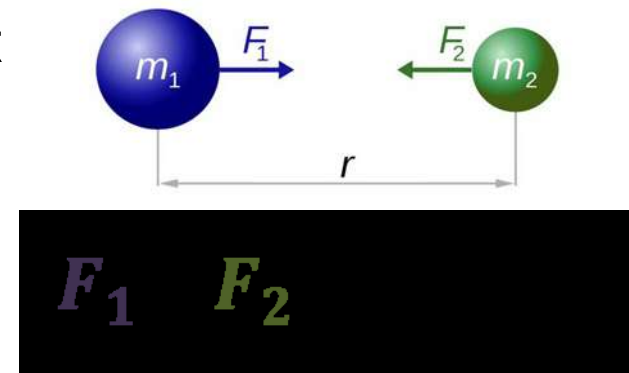
- Два любых тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной массе каждого из них и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними [17, с. 125].

Коэффициент пропорциональности **G** называется **гравитационной постоянной**.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$$



Исаак Ньютон
(1643 – 1727 гг.)



Введение

Роль гравитационной теории Ньютона в изучении Солнечной системы

- Ньютон доказал, что орбиты планет Солнечной системы имеют форму **эллипса** [13].
- **Орбита** (от лат. «**orbita**» - путь, дорога) - постоянная траектория движения космического тела меньшей массы вокруг тела большей массы под воздействием силы притяжения, объясняющаяся его движением [17, с. 298].



Солнечная система

Введение

Роль гравитационной теории Ньютона в изучении Солнечной системы

- **Закон всемирного тяготения** лежит в основе расчета космических скоростей т.е. скоростей движения тел в космосе.

Пример: $F_{\text{центрострем.}} = F_{\text{тягот.}}$

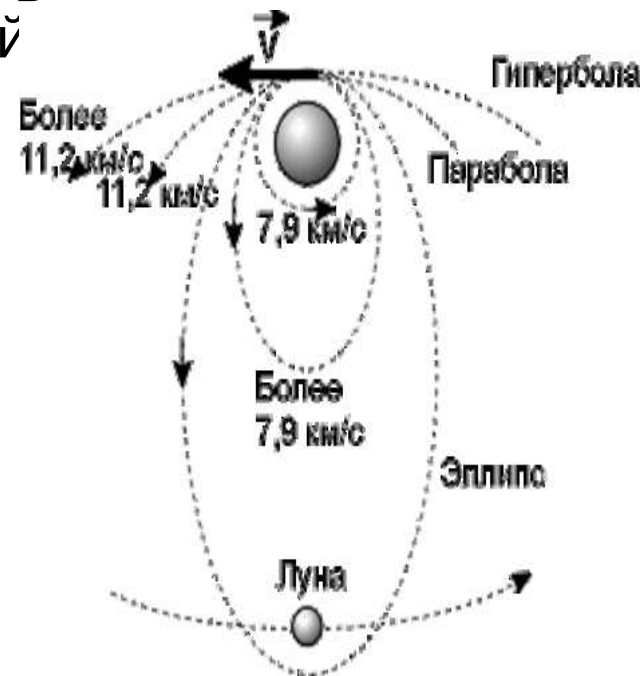
$$\frac{m \cdot v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

где $M_{\text{Земли}} = 5,97 \cdot 10^{24}$ кг;

$R_{\text{Земли}} = 6371$ км

$v_I = 7,9$ км/с



Траектории движения космических аппаратов

- **Первая космическая скорость** – скорость, которую нужно придать телу на Земле для вывода его на орбиту Земли [17, с. 184].

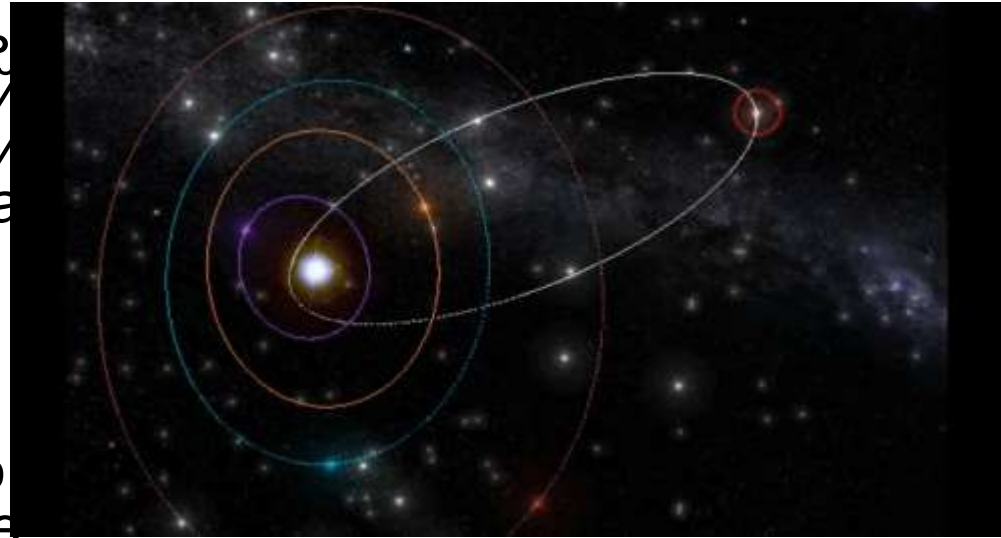
Постановка задачи

- В 1890 году астрономы доказали, что в Солнечной Системе между Юпитером и Марсом раньше существовала еще одна планета.

Ее называли **Фэтон**.

- Доказательством является то, что сейчас в этом месте находится **пояс астероидов** (состоит примерно из 400000 астероидов).

- Эта находка интересна тем, что на астероидах найдены следы органических молекул, которые доказывают существование жизни на Фэтоне [10, с.143].



Орбита и траектория движения планеты Фэтон

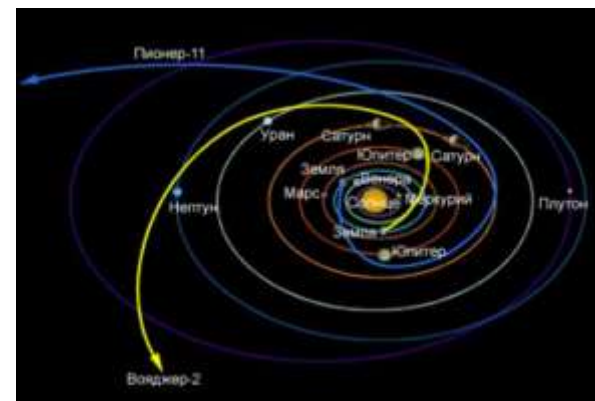


Гибель планеты Фэтон

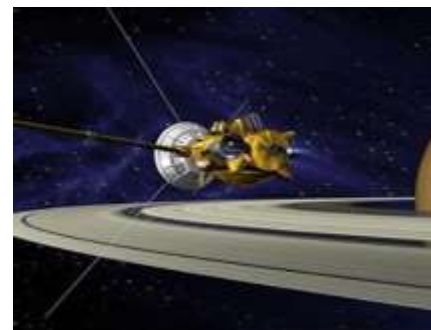
В поисках планеты Фаэтон

- 16 июля 1972 года был произведён запуск космического зонда «Пионер-10», который долетел до области главного пояса астероидов.
- В 1991 году аппарат «Галилео» сфотографировал первые объекты главного пояса астероидов (Гаспра и Ида; их диаметр не более 50 км).
- В поясе астероидов также удалось побывать таким станциям как: «Вояджер-1», «Вояджер-2», «Пионер-11», «Галилео», «NEAR Shoemaker» [14].
- 27 сентября 2007 года была запущена межпланетная станция «Dawn» для изучения крупнейших объектов главного пояса: Церера и Веста.
- 16 июля 2011 года аппарат добрался до орбиты Весты. Сейчас он держит путь к карликовой планете Церера.

<http://voyager.jpl.nasa.gov/mission/interstellar.html>



Выход космических аппаратов за пределы Солнечной системы



Космический аппарат "Voyager-1"



Космический аппарат "Dawn"

Исходные допущения и цель исследования

Цель исследования: исследовать зависимость траектории движения искусственного спутника планеты Фаэтон (или другой изучаемой планеты) при наличии естественного спутника этой планеты от:

- радиуса пояса астероидов;
- взаимного расположения естественного спутника планеты с поясом астероидов (см. рис. 1 и 2).

Исходные допущения:

- пояс астероидов имеет форму окружности с центром в месте существования погибшей планеты Фаэтон;
- суммарная масса астероидов равна массе естественного спутника планеты Фаэтон;
- центры масс всех астероидов, планеты Фаэтон и ее естественного спутника принадлежат одной плоскости;
- значение гравитационной постоянной не меняется.

Методы исследования: компьютерное динамическое моделирование средствами GeoGebra; компьютерный эксперимент



Рисунок 1.



Рисунок 2.

Задачи исследования

- Перевести задачу на язык геометрии, раскрыть смысл всех базовых геометрических терминов.
- Создать рабочий динамический лист для компьютерной поддержки решения задачи средствами GeoGebra.
- Провести компьютерные эксперименты для получения данных о зависимости траектории движения искусственного спутника от начальных условий.
- Обосновать гипотезы, выдвинутые в результате компьютерных экспериментов.

Результаты решения задачи 1

- **Задача:** Найти геометрическое место точек плоскости (траекторию движения искусственного спутника), равноудаленных от окружности (пояса астероидов) и данной точки (естественного спутника).
- **Обоснование:** Для того, чтобы искусственный спутник не попал в гравитационное поле пояса астероидов либо естественного спутника, *обладающих одинаковыми массами*, необходимо, чтобы он в каждый момент времени был равноудален от них.

$$\vec{F}_{\text{Фаэтона}} + \vec{F}_{\text{спутника}\Phi} = \vec{0}$$

$$G \frac{mM_{\Phi}}{R^2} = G \frac{mM_{\text{спут}\Phi}}{r^2}$$

$$M_{\Phi} = M_{\text{спут}\Phi} \Rightarrow R = r,$$

- где R – расстояние от искусственного спутника до останков планеты Фаэтон, r – расстояние от искусственного спутника до естественного спутника планеты Фаэтон.

Траектория как геометрическое место точек

- **Геометрическое место точек** – это множество тех и только тех точек плоскости (или пространства), которые удовлетворяют заданному свойству или набору свойств [2].
- **Траектория движения** – линия, по которой движется тело в физическом пространстве под влиянием системы действующих на него сил и начальной скорости.
- **Обоснование:** центры масс всех космических тел по допущению *находятся в одной плоскости*. Движение искусственного спутника происходит под действием *только гравитационных сил*, следовательно, путь его движения может рассматриваться как линия плоскости, которая является ГМТ, равноудаленных от окружности и точки.

Поиск обобщенного понятия расстояния

Понятие расстояния от точки до ..., в школьном курсе математики:

- Расстояние между точками **A** и **B** измеряется длиной отрезка **AB** (рис. 1) [2, с. 81].
- Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, измеряется длиной перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую (рис.4) [2, с. 81].

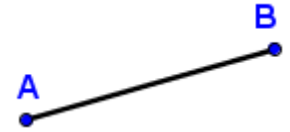


Рисунок 1.

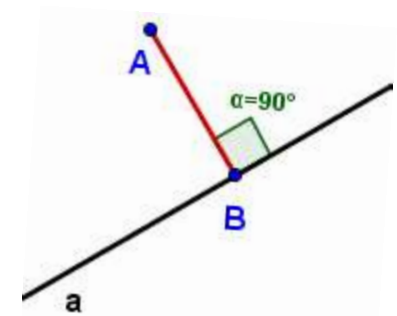


Рисунок 2.

Понятие расстояния между пунктами в школьном курсе физики:

- Расстоянием между пунктами **A** и **B** называется длина наименьшего пути (траектории) с началом и концом в ЭТИХ ТОЧКАХ (рис. 3) [8, с. 31].



Рисунок 3.

Определение понятия расстояния от точки до окружности

- Расстоянием от окружности с центром в точке O до точки A , лежащей *вне* окружности, является отрезок AB , где B - пересечение окружности с отрезком OA [15] (рис.1).



- Расстоянием от окружности с центром в точке O до точки A , лежащей *внутри* окружности, является отрезок AB , где B - пересечение окружности с отрезком OA [15] (рис.2).



- Расстоянием от окружности с центром в точке O до точки A , является отрезок AB , где B - пересечение окружности с лучом OA .

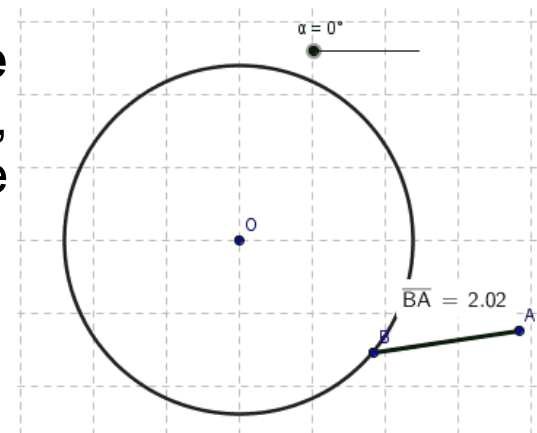


Рисунок 1.

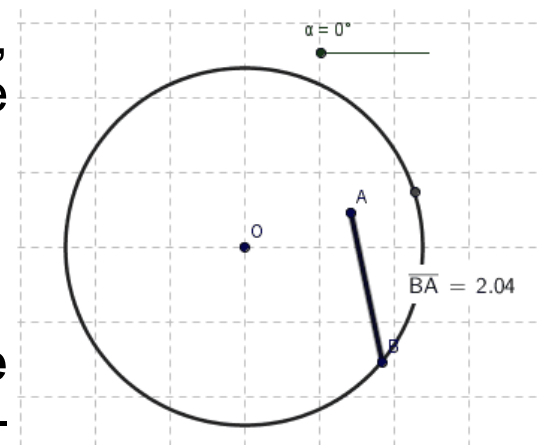


Рисунок 2.

Результаты решения задачи 2

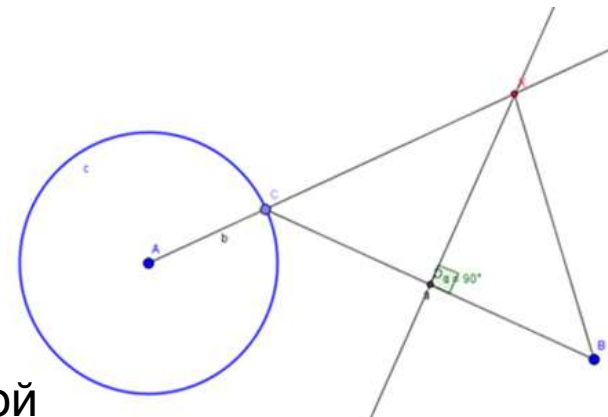
Алгоритм построения

1. Точка $X \in \text{ГМТ } 1 \cap \text{ГМТ } 2$;

2. **ГМТ 1** – точка X лежит на луче с началом в центре окружности;

3. **ГМТ 2** - точка X лежит на прямой равноудаленной от концов отрезка, образованного данной точкой и точкой окружности.

- Отметим на окружности произвольно точку C .
- Проведем луч AC .
- Построим отрезок CB .
- Построим **ГМТ**, равноудаленных от точек C и B - серединный перпендикуляр к отрезку CB .
- Найдем точку пересечения луча AC с серединным перпендикуляром, получим точку X .



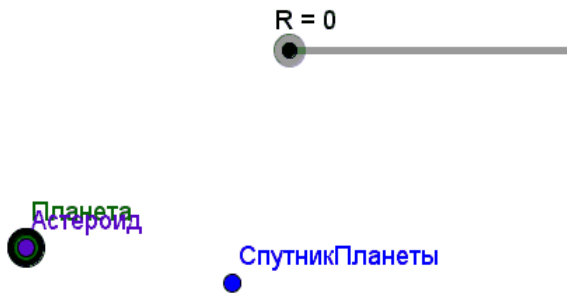
Новый инструмент GeoGebra
«Траектория спутника»



GeoGebra

Результат решения задачи 3

- **Компьютерные эксперименты** показали, что от радиуса пояса астероидов зависит форма ГМТ.
- Взаимное расположение пояса астероидов и естественного спутника планеты меняет вид самой кривой ГМТ.



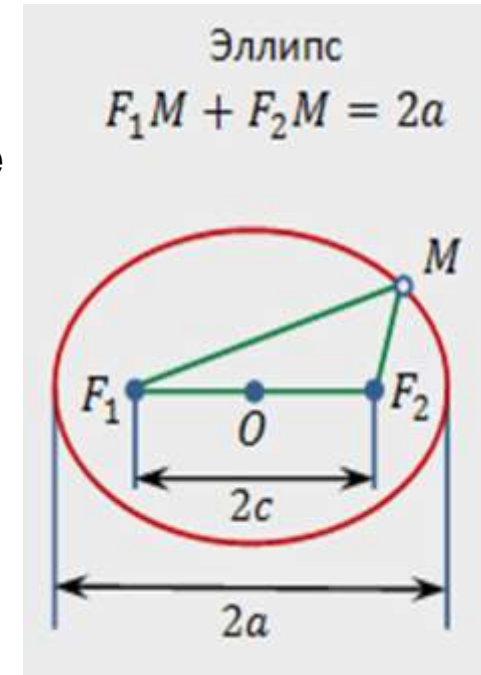
Гипотезы:

1. Если спутник планеты находится вне пояса астероидов, то траектория движения искусственного спутника должна иметь форму **гиперболы**.

2. Если спутник планеты находится внутри пояса астероидов, то траектория движения искусственного спутника должна иметь форму **эллипса**.

Результаты решения задачи 4

- **Эллипс** — это множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$.
- Точки F_1 и F_2 - **фокусы эллипса**;
- Расстояние $2c = F_1F_2$ между ними **фокусное расстояние**
- Середина O отрезка F_1F_2 — **центр эллипса**.;
- Число $2a$ — **длина действительной оси эллипса** (соответственно, a — **действительная полуось эллипса**);
- Отрезки F_1M и F_2M , соединяющие произвольную точку M эллипса с её фокусами – **фокальные радиусы точки M** .

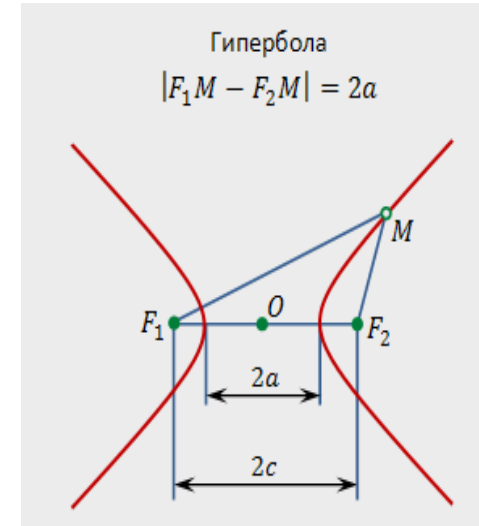


Каноническое уравнение эллипса [13]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Свойства гиперболы

- **Гипербола** – это множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 этой же плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная $2a$, меньшая расстояния $2c$ между этими заданными точками [13].
- Точки F_1 и F_2 - **фокусы гиперболы**;
- Расстояние $2c = F_1F_2$ между ними **фокусное расстояние**;
- Середина O отрезка F_1F_2 — **центр гиперболы**;
- Число $2a$ — **длина действительной оси гиперболы** (соответственно, a - действительная полуось гиперболы);
- Отрезки F_1M и F_2M , соединяющие произвольную точку M гиперболы с её фокусами - **фокальные радиусы** точки M .



Каноническое уравнение гиперболы [13]:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Интерпретация результатов компьютерного эксперимента

- Пусть точки **A** и **B** – фокусы,
тогда длина отрезка **AB** - фокальное расстояние
гиперболы (эллипса).

Тогда по построению точки **X**:

- для случая, когда точка **B** вне окружности (рис.1):
 $|AX - BX| = |AX - CX| = AC = R = const$,
следовательно, ГМТ – гипербола;
- для случая, когда точка **B** внутри окружности (рис.2):
 $|AX + XB| = |AX + XC| = R = const$,
следовательно, ГМТ – эллипс.

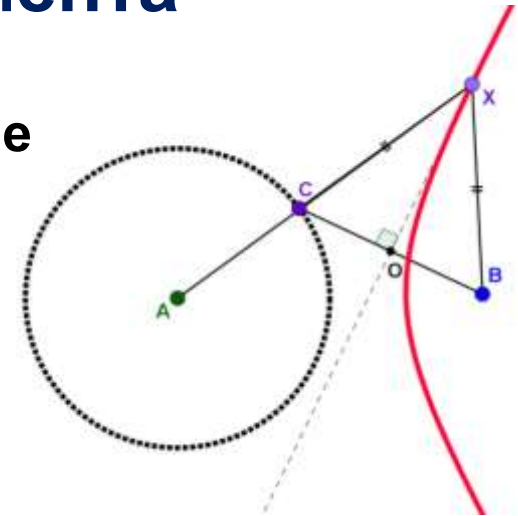


Рисунок 1.

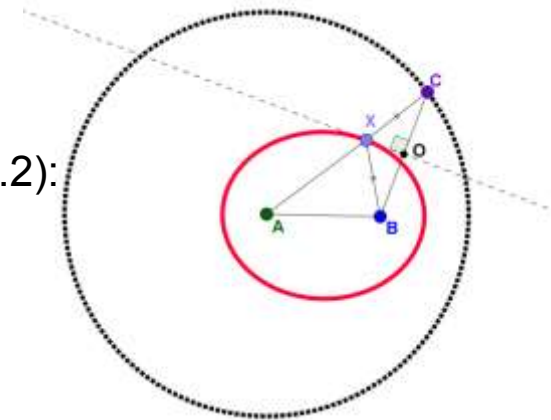


Рисунок 2.

Выдвинутые гипотезы оказались справедливы.

Выводы

- В ходе исследования были проанализированы различные источники информации [1, 3 - 5, 7, 9,10, 17] и изучены явление всемирного тяготения, физические основы запусков искусственных спутников Земли.
- С помощью моделирования объекта исследования в системе динамической математики GeoGebra получены траектории движения спутников в гравитационном поле двух космических тел одинаковой массы: пояса астероидов и естественного его спутника.
- Установлены виды кривых, являющихся траекториями при различных вариантах взаимного расположения пояса астероидов и естественного спутника: эллипс, гипербола.
- Создан инструмент, позволяющий построить геометрическое место точек (ГМТ), равноудаленных от заданной окружности и некоторой точки плоскости.

Библиография

1. Акопян А.В., Заславский А.А. Геометрические свойства кривых второго порядка.- М.: МЦНМО, 2007-136 с
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. Учебник для 7- 9 классов - М. : Просвещение, 2015.- 385 с.
3. Галузо И. В. Астрономия : учеб. пособие для 11-го кл. общеобразоват. Учреждений - 2-е изд., 2009. - 70 с.
4. Зими́на О.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учеб. комплекс: учеб. пособие/ под ред. Кириллова А.И. - М.: Изд-во МЭИ, 2000. – 328 с.
5. Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении. М.: Большая советская энциклопедия, 1978.- 315 с.
6. Ожегов С. И. Толковый словарь русского языка.- М.: Оникс, 2011. – 736 с.
7. Парфентьева Н.А., Липкин Г.И. Использование элементов математического анализа. – Журнал «Физика», № 3, 2000.- 56 с.
8. Перышкин А.В. Физика. 7 кл.; учебник для общеобразовательных учреждений. стереотип. издание, - М.: Дрофа, 2013. – 192 с.
9. Перышкин А.В., Гутник Е.М. Физика. 9 кл.; учебник для общеобразовательных учреждений. стереотип. издание, - М.: Дрофа, 2011. - 248 с.
- 10.Рябов Ю. А. Движения небесных тел. Физическая энциклопедия. В 5-ти томах/ под ред. Прохорова А.М.- М.: Советская энциклопедия, 1988.- 189 с.
11. Фейнман Ричард. Характер физических законов. Связь математики с физикой, режим доступа: <http://www.uhlib.ru/fizika/harakter.fizicheskikh.zakonov/p5.php>
- 12.Большая политехническая энциклопедия /под. ред.Рязанцева В. Д.- М.: Мир и образование, 2011.- 356 с.
- 13.Математический форум Math Help Planet, режим доступа: <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=giperbola>
14. Официальный сайт программы «Voyager» <http://voyager.jpl.nasa.gov> (дата обращения 20.02.2016)
15. Расстояние между точками и фигурами, режим доступа : webmath.exponenta.ru/bsd/tab/m90.html
- 16.Энциклопедия «Авиация». / под ред. Свищёва Г. Г. - М.: Большая Российская Энциклопедия, 1998.-293с.
17. Энциклопедический словарь юного физика/под ред. Чуянова В.А. — М.: Педагогика, 1984.- 354 с.