

ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ИНЖЕНЕРНОМ АНАЛИЗЕ

Лекция 6

Болдырев Ю.Я., Замотин К.Ю., Петухов Е.П.

Санкт-Петербургский Государственный
Политехнический Университет

boldyrev@phmf.spbstu.ru

РАЗДЕЛ 3.
ПРИМЕРЫ ХАРАКТЕРНЫХ
МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫХ И
ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ, ТРЕБУЮЩИХ
БОЛЬШИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ
РЕСУРСОВ



Проблема турбулентности и задачи моделирования турбулентных течений

3

Уравнения Навье-Стокса

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 \omega \end{aligned} \right\}$$

В векторной форме $\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 V,$

$V=(u, v, \omega)$ – компоненты вектора V скорости жидкости,

ρ – плотность, p – давление, $F=(F_x, F_y, F_z)$ – компоненты вектора массовых сил (в частности сил тяжести),

ν – кинематическая вязкость

Проблема турбулентности и задачи моделирования турбулентных течений

4

- Уравнения Навье-Стокса – это система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Случаев интегрируемости этих уравнений весьма немного.
- Простой пример – моделирование диффузии вихрей, отвечающее «медленному» движению вязкой жидкости (ламинарному движению)

Моделирование диффузии вихрей

5

Имеется бесконечно протяженная вихревая нить в безграничной трехмерной области с заданной циркуляцией Γ

$$\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

\vec{V} – вектор скорости, C – произвольный замкнутый контур, внутри которого находится вихревая нить. Начальное поле скоростей ($t=0$) определяется по формуле

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

при $r \rightarrow \infty$ величина скорости падает до нулевых значений на бесконечном удалении от вихревой нити

Моделирование диффузии вихрей

6

- Если удалить источник завихренности, то начинается нестационарный процесс.
- Предполагаем, что имеется осевая симметрия с круговыми линиями тока
- Рассматриваемое течение плоское с круговыми линиями тока, конвективный член выпадает

$$\Omega = \text{rot} \vec{V} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \Omega$$

- В полярных координатах

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right).$$

Моделирование диффузии вихрей

7

- Уравнение интегрируется при начальных условиях: $\Omega=0$ при $t=0$ и $r>0$, и при «предельном» граничном условии $\Omega \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$

$$\Omega = \frac{C}{t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)$$

- C – постоянная, определяемая из интенсивности циркуляции вихревой трубки данного радиуса r , которая равна циркуляции скорости $V\pi r$

$$V = \frac{1}{2\pi r} \int_0^r \frac{C}{t} \exp(-r^2 / 4\nu t) 2\pi r dr = \frac{2C\nu}{r} (1 - \exp(-r^2 / 4\nu t))$$

Моделирование диффузии вихрей

8

- Начальное распределение скоростей $V = \frac{\Gamma}{2\pi r},$
- При $t=0$ $C=\Gamma/4\pi r$
- Формулы для распределения вихря и скорости

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right), \quad V = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right).$$

Турбулентность течений

9

- Большинство течений жидкостей и газов, наблюдаемых в природе и в технических устройствах, являются турбулентными
- Турбулентность — это хаотические пульсации скорости течения и давления



Число Рейнольдса

10

- Английский механик О. Рейнольдс (1842-1912) установил, что если характерное число

$$Re = V \cdot L / \nu$$

становится большим ~ 1000 , то течение из ламинарного переходит в турбулентное

- L – характерный размер области течения, V – его скорость, а ν – кинематическая вязкость жидкости

Проблема турбулентности

11

- Проблема турбулентности – одна из нерешенных проблем XX века
- Потребность и необходимость в развитии численных методов ее исследования
- Численное моделирование турбулентности – одна из наиболее характерных задач применения суперкомпьютерных технологий
- Трудности в решении задач, связанных с турбулентными течениями породили большое число подходов, которые принято называть полуэмпирическими моделями турбулентности

Модель Рейнольдса

12

- Скорости, как и другие физические величины течения, представляются сглаженными (осредненными по времени) величинами в данной точке и их пульсационными составляющими

$$u = \bar{u} + u', v = \bar{v} + v', w = \bar{w} + w'$$

- Осредненные величины можно вычислять как интегральное среднее за некоторый период времени

$$\bar{u}(x, y, z, t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(x, y, z, t) dt$$

Модель Рейнольдса

13

- Уравнения Навье–Стокса в дивергентной форме (уравнения в напряжениях)

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} = \text{Div}(P - \rho W), \quad \text{div}(V) = 0$$

- тензор-диада $\rho(W)$ — перенос количества движения ρV потоком со скоростью V
- Второе уравнение есть уравнение неразрывности, а тензор P имеет вид

$$P = -pE + 2\mu\dot{S}$$

- E — единичный тензор, p — давление, а \dot{S} — тензор скоростей деформаций

Модель Рейнольдса

14

- Исходя из выражения для истинной величины через сглаженную и пульсационную, получим уравнения Рейнольдса

$$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \text{Div}(\bar{P} - \rho \bar{V}\bar{V} - \rho \bar{V}\bar{V}'), \quad \text{div}(\bar{V}) = 0$$

- дополнительный член уравнения – симметричный тензор «рейнольдсовых турбулентных напряжений», который является характеристикой переноса пульсационного количества движения пульсационными скоростями

$$\Pi = -\rho \bar{V}'\bar{V}'$$

Модели турбулентности

15

- Полуэмпирические модели турбулентности – математические модели для определения компонент тензора Π
- Модели должны носить характер самостоятельных вспомогательных гипотез и допущений, не связанных ни с уравнениями Навье-Стокса, ни с уравнениями Рейнольдса
- Модели должны опираться на эксперимент, включать в себя некоторые полученные опытным путем константы

Вычислительная реализация полуэмпирических моделей турбулентности

16

Подходы, базирующиеся на уравнениях Навье-Стокса:

- Direct Numerical Simulation (**DNS**) – прямое численное моделирование
- Large Eddy Simulation (**LES**) – метод моделирования крупных вихрей
- Detached-Eddy Simulation (**DES**) – метод моделирования отсоединенных вихрей

Перспективы практического применения различных подходов к моделированию турбулентных течений

17

RANS – Reynolds Averaged Navier-Stokes уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу

Метод	Необходимое число узлов сетки	Необходимое число шагов по времени	Год готовности*
3D <u>Steady</u> RANS	10^7	10^3	1985
3D Unsteady RANS	10^7	$10^{3,5}$	1995
DES	10^8	10^4	2000
LES**	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7.7}$	2080***

*Возможность расчета одного варианта в течение суток на самом мощном из доступных компьютеров

**LES с пристеночным RANS моделированием, в случае LES вплоть до твердых стенок, затраты оказываются сопоставимыми с затратами DNS

***На компьютере с производительностью 1 терафлоп время расчета составляет 5000 лет

Метод DNS

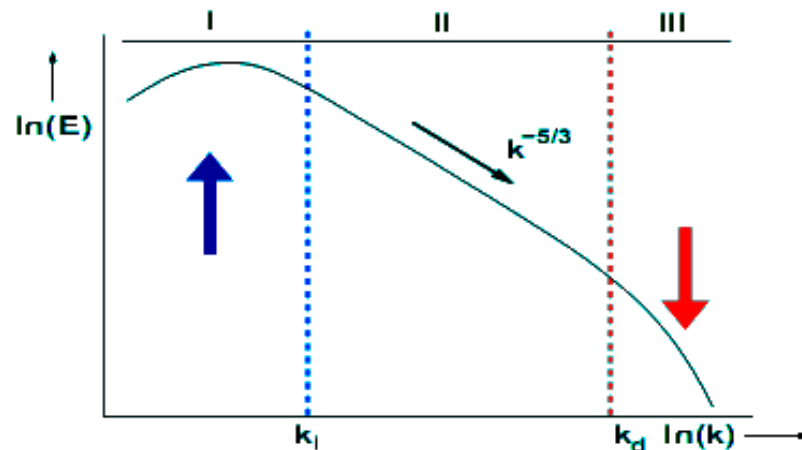
18

- Уравнения Навье-Стокса адекватно описывают не только ламинарные, но и турбулентные течения
- Прямое решение трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса
- Необходимо достаточно точно разрешить все пространственно-временные масштабы турбулентности

Осреднение по Рейнольдсу

19

- Пространственные масштабы – весь спектр характерных размеров вихревых структур
- Временные масштабы – характерные времена – от появления, развития, до исчезновения вихревых структур



Зависимость характерных масштабов спектра кинетической энергии турбулентности от волнового числа (энергетический спектр турбулентности) при достаточно высоких числах Рейнольдса

Области энергетического спектра турбулентности

20

- Область I соответствует крупномасштабным турбулентным вихрям с наибольшей кинетической энергией и с размерами порядка характерного линейного масштаба течения L (им отвечает волновое число $k_I = 2\pi/L$)
- В области III спектра доминируют мелкие вихри с размерами меньше Колмогоровского масштаба $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ (ε – скорость диссипации энергии турбулентности) и волновыми числами $k > k_d = 2\pi/\eta$, вязкая диссипация которых переводит кинетическую энергию турбулентности в тепло.

Области энергетического спектра турбулентности

21

- Область II, или инерционная область спектра, лежащая между областями I и III, соответствует вихревым структурам с характерными размерами l , лежащими в «среднем» диапазоне $L < l < \eta$.
- Влияние вязкости в этой области никак не проявляется, и энергия турбулентности не генерируется и не диссипирует, а лишь передается от более крупных вихрей к менее крупным (так называемый энергетический каскад).

Рост временных затрат при использовании DNS

22

- Отношение максимального L и минимального η линейных масштабов турбулентности пропорционально числу Рейнольдса $L/\eta \approx Re^{3/4}$
- Для всей трехмерной области размер пространственной сетки, необходимой для проведения расчетов с помощью DNS, растет с увеличением числа Рейнольдса как $Re^{9/4}$
- С учетом временных масштабов затраты на проведение DNS растут как $Re^{9/4} + Re^{1/2} = Re^{11/4}$

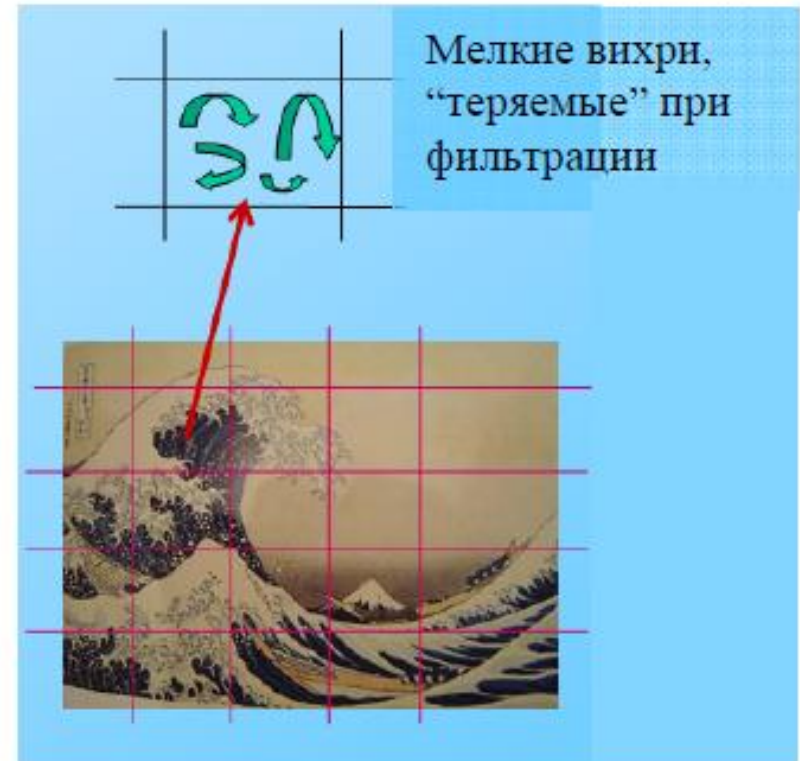
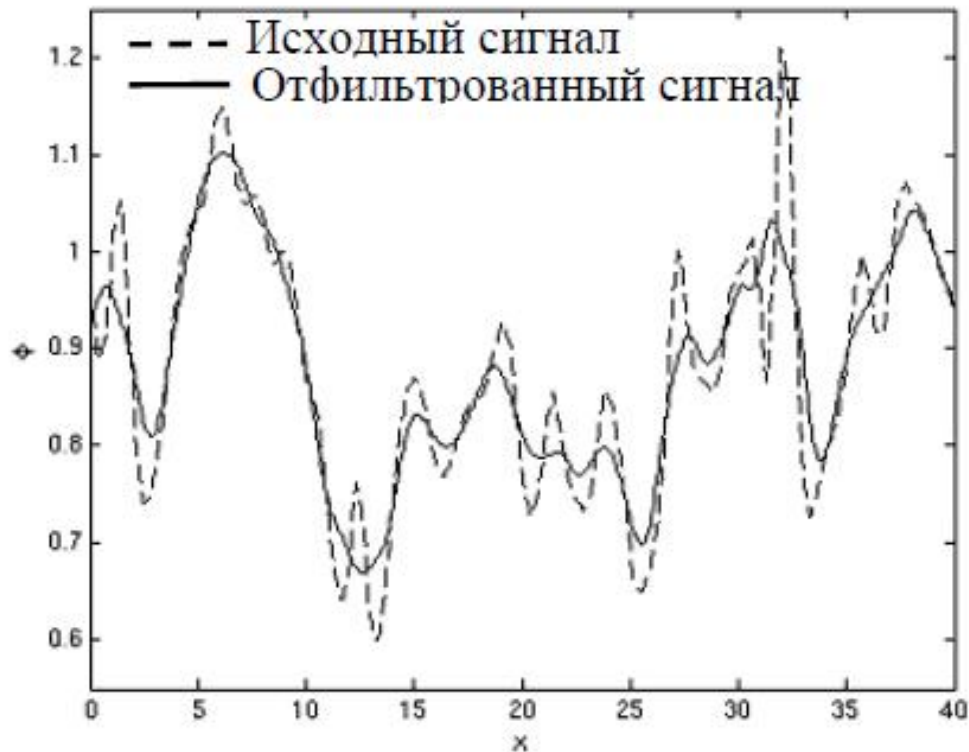
LES (метод моделирования крупных вихрей)

23

- Выделение (фильтрация) возмущений (вихрей) по их размерам
- Отделение «очень мелких» (с длинами волн порядка и меньше размеров используемой расчетной сетки) турбулентных вихрей
- Крупные вихри описываются полученными уравнениями, а влияние мелкомасштабной «отфильтрованной» (подсеточной) турбулентности описывается с помощью полуэмпирических моделей

Фильтрация возмущений в LES

24



Фильтрация возмущений в LES

25

- Реальные переменные φ в уравнениях Навье-Стокса заменяются на сумму соответствующих «отфильтрованных» $\tilde{\varphi}$ и «подсеточных» φ' переменных

$$\tilde{\varphi}(x, y, z, t) = \int_V G(x - x', y - y', z - z', \Delta) \varphi(x, y, z, t) dx' dy' dz'$$

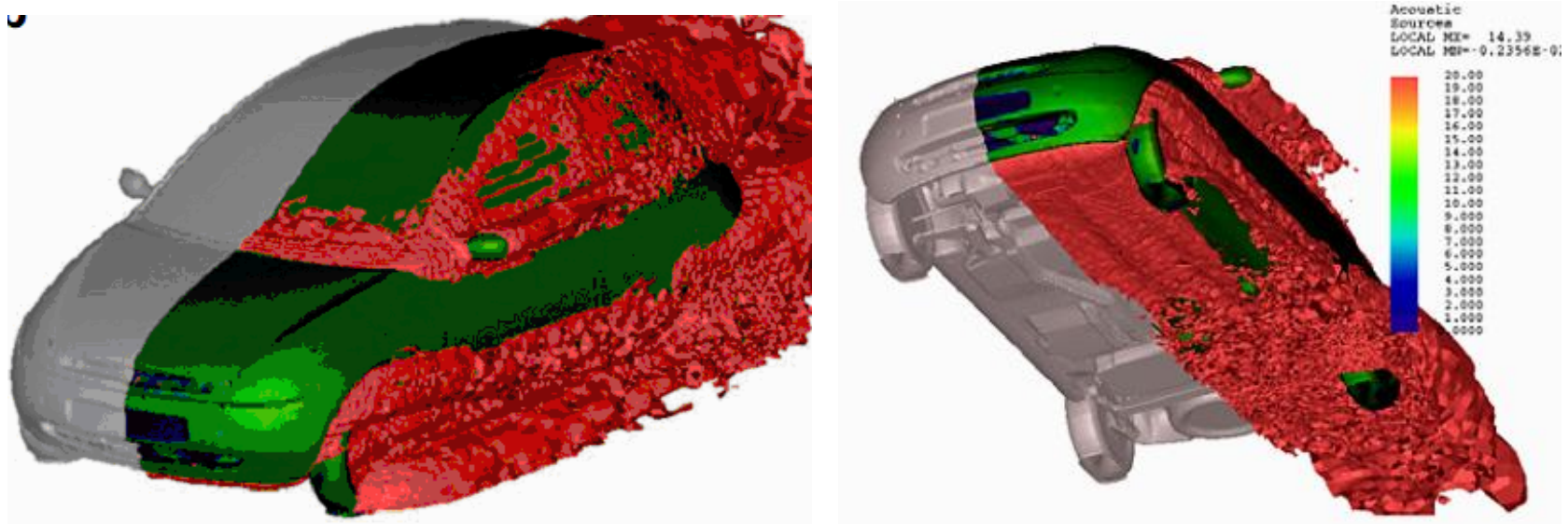
- G и Δ – функция и ширина фильтра

$$G(\bar{r}, \bar{r}') = \begin{cases} 1/\Delta, & \text{если } |\bar{r} - \bar{r}'| < \Delta/2 \\ 0, & \text{если } |\bar{r} - \bar{r}'| > \Delta/2 \end{cases}$$

Аэроакустическое приложение гибридного (DES) подхода

26

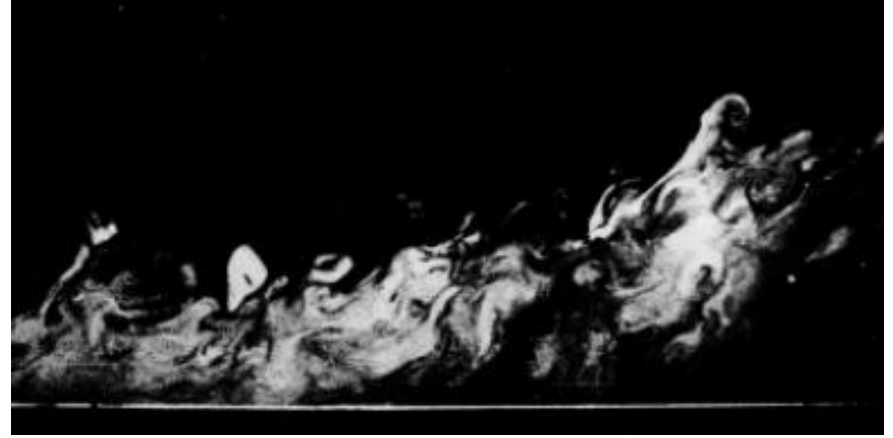
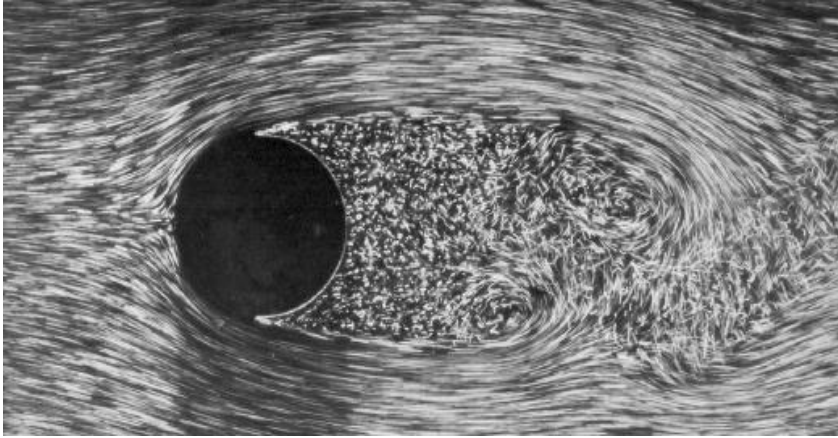
Обтекание автомобиля Форд (расчет выполнен с помощью программного комплекса STAR-CD)



Мгновенная изоповерхность интенсивности источников шума на поверхности автомобиля Форд из расчета с помощью варианта модели Спаларта-Аллмараса для DES

Трехмерные нестационарные турбулентные вихри

27



Недостатки полуэмпирических моделей

28

- Наряду с мелкомасштабной турбулентностью, существенное влияние на параметры турбулентных потоков оказывают крупномасштабные, принципиально трехмерные нестационарные турбулентные вихри (когерентные структуры)
- Характеристики таких вихревых структур зависят главным образом от конкретной геометрии рассматриваемого течения и граничных условий и, как следствие, не могут быть описаны в рамках полуэмпирических моделей, не учитывающих этих важных обстоятельств

Модели турбулентности для внешних течений

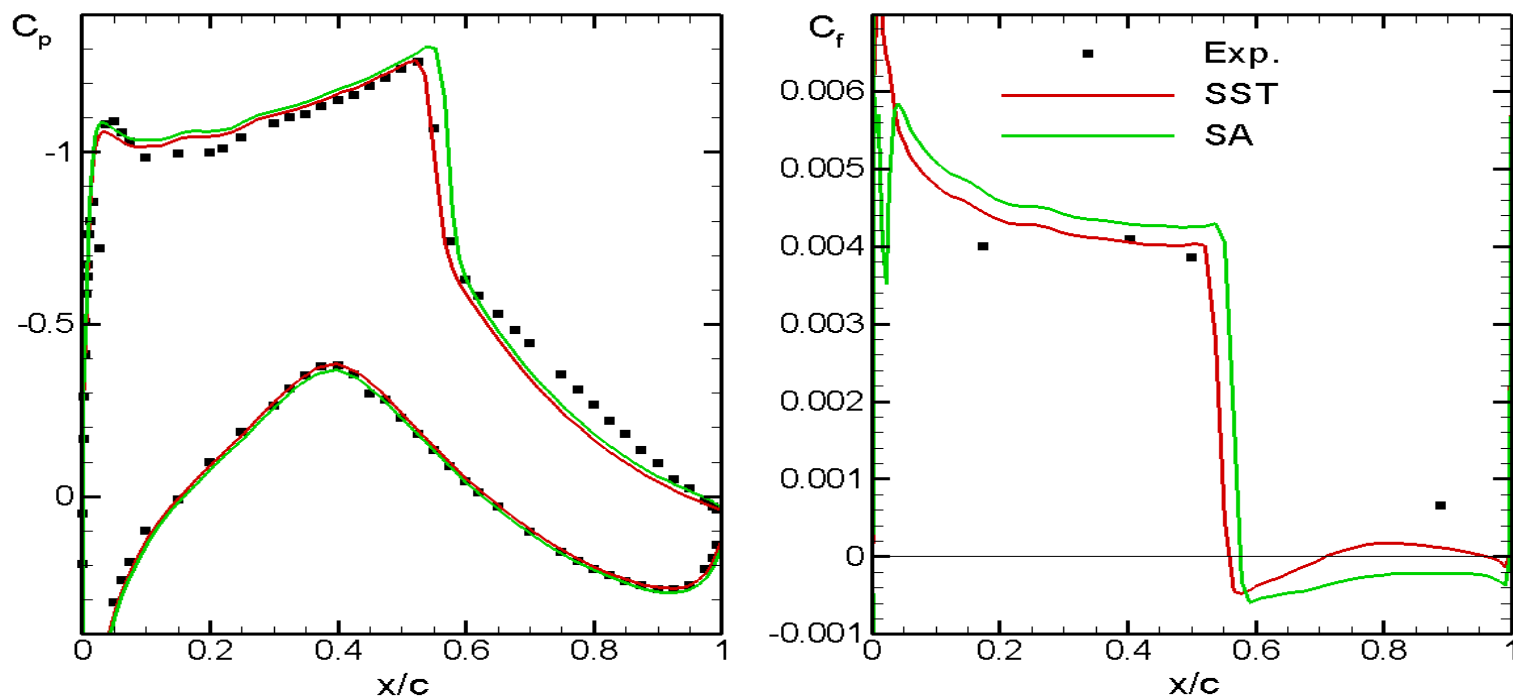
29

- Модель Спаларта и Аллмараса (**SA** модель) – содержит только одно дифференциальное уравнение переноса (для модифицированной турбулентной вязкости)
- Модель Ментера (k - ω Shear Stress Transport или **SST** модель) – содержит два уравнения – для кинетической энергии турбулентности и для удельной скорости ее диссипации

Пример: Трансзвуковое обтекание аэродинамических профилей

30

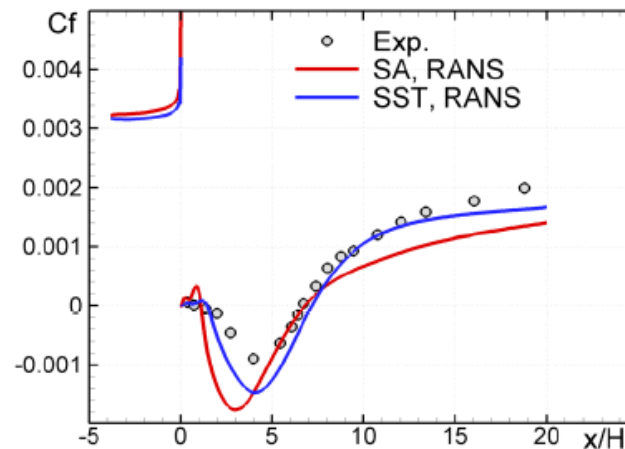
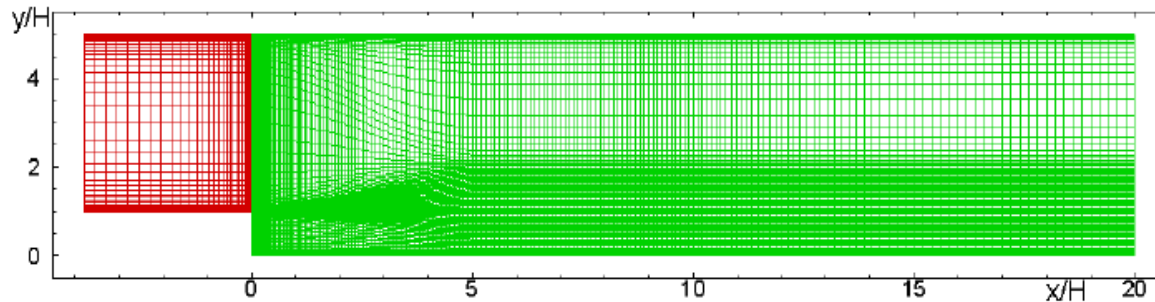
Сравнение продольных распределений коэффициентов давления и трения по поверхности профиля NASA RAE2822 с результатами измерений



RAE 2822, case 10: $Re=6.2 \cdot 10^6$, $Mach=0.75$, $\alpha=3.19^\circ$

Течение в области с обратным уступом – тестовый пример

31



Сравнение расчетных распределений трения C_f в канале с обратным уступом, полученных с использованием SA и SST моделей с экспериментом

Литература

32

- Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. - 840 с.
- А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур Возможности и ограничения современных подходов к моделированию турбулентности в аэродинамических расчетах. Учебное пособие. СПбГПУ, 2012, С.88.
- Spalart P. R. Strategies for turbulence modeling and simulations, Int. J. Heat Fluid Flow, 2000, v. 21, pp. 252–263.
- Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика, Наука, 1965. Т.1-2.
- Ferziger J. H. Recent Advances in Large Eddy Simulation, Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3, W. Rodi and G. Bergeles (Editors), 1996, Elsevier, pp. 163-176.
- Волков К. Н., Емельянов В. Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.

Литература

33

- Piomelli U., Balaras E. Wall-layer models for large-eddy simulations, Annual Rev. Fluid Mech., 2002, v. 34, pp. 349-374.
- Forsythe J., Squires K., Wurtzler K., Spalart P. Detached-eddy simulation of fighter aircraft at high alpha, AIAA Paper 2002-0591.
- Mendonca F., Allen R., de Charentenay J., Lewis M. Towards understanding LES and DES for industrial aeroacoustic predictions. Int. Workshop «LES for Acoustics», Gottingen, 2002.
- Spalart P. R. Editorial: RANS modeling into a second century, Special issue of International J. of CFD, 2009, v.23, No.4, pp.291-293.
- Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, AIAA Paper 1992-0439.
- Menter F. R. Zonal two-equation k - ω turbulence models for aerodynamic flows, AIAA Paper 1993-2906.

Литература

34

- Menter F. R., Kuntz M., and Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model, *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4*, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc., 2003, pp. 625 - 632.
- Wilcox D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. Griffin Printing, Glendale, California, 1993.
- Buice C. U., Eaton J. K. Experimental Investigation of Flow Through an Asymmetric Plane Diffuser, Report No. TSD-107, Thermo sciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford, 1997.
- Cook P. H., McDonald M. A., Firmin M. C. P. “Aerofoil RAE 2822 – Pressure Distributions, and Boundary Layer and Wake Measurements”, AGARD Report AR 138, 1979.
- Vogel J. C., Eaton J. K. Combined heat transfer and fluid dynamic measurements downstream of a backward-facing step, *Journal of Heat and Mass Transfer*, 1985, v. 107, p. 922–929.