ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ИНЖЕНЕРНОМ АНАЛИЗЕ

Лекция 1

Болдырев Ю.Я., Замотин К.Ю., Петухов Е.П.

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет

boldyrev@phmf.spbstu.ru

Введение

Цели курса :

- знакомство с основами суперкомпьютерных технологий в их приложении к инженерному анализу
- начальное освоение современных подходов к расчетам машин, механизмов и самых разнообразных систем на основе использования суперкомпьютеров

Структура курса

- **Раздел 1** – основные понятия современного математического моделирования и их связь с инженерным анализом и проектированием на базе компьютерных (суперкомпьютерных) технологий.
- **Раздел 2** – знакомство и первоначальное освоение важнейших современных подходов компьютеризованного производства. Тенденции и подходы к процессу внедрения и развития компьютерных (суперкомпьютерных) технологий в промышленности.

Структура курса

- **Раздел 3** – примеры междисциплинарных инженерно-технических задач, решение которых принципиально невозможно без больших вычислительных ресурсов.
- **Раздел 4** – важнейшие этапы постановки вычислительных задач на суперкомпьютерах. Проблемы постановки задач инженерного анализа и проектирования –начально-краевые и краевые задачам математической физики.

Структура курса

- **Раздел 5** – ключевые этапы решения масштабных вычислительных задач на суперкомпьютерах.
- **Раздел 6** – описание программных комплексов для инженерного анализа и проектирования. Классификация программных комплексов, описание их структуры и практического применения к инженерным задачам.

РАЗДЕЛ 1.
ОСНОВЫ СОВРЕМЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ СВЯЗЬ С ИНЖЕНЕРНЫМ АНАЛИЗОМ И ПРОЕКТИРОВАНИЕМ

Основы современного математического моделирования

- Современное понимание термина «математическое моделирование» начало формироваться в конце XIX – начале XX веков.
- В его становлении выдающуюся роль сыграли труды Р. Фреше и Д. Гильберта, благодаря им были созданы новые подходы в вычислительной математике и заложены теоретические основы современного математического моделирования.
- В дальнейшем формировании решающую роль сыграли новые идеи в формулировке задач математической физики в форме интегральных тождеств, а также метод конечных элементов. Российские ученые, принимавшие участие в формировании современной Концепции математического моделирования: А.А. Самарский, О.М. Белоцерковский и др.

Основы современного математического моделирования

- Появление вычислительных машин привело к новому этапу научно-технической революции и окончательно сделало математическое моделирование важнейшим инструментарием ученых и инженеров. Замена физического эксперимента на вычислительный привела к революционной смене методологии.
- В течение XX века математическое моделирование превратилось в универсальный инструментарий, с помощью которого проводятся исследования самых сложных явлений природы, создаются машины и системы с уникальными характеристиками, изучаются социально-экономические процессы в обществе и решается подавляющее большинство других задач во всех областях человеческой деятельности.

Современная Концепция математического моделирования

- **I блок – Составление математической модели исследуемого явления, процесса, задачи**
- Замена реального явления его математической моделью, описание всех его свойств и характеристик с помощью математических соотношений.
- Вопрос точного описания явления с помощью количественных (математических) соотношений – Как точно мы описываем то или иное явление?

Современная Концепция математического моделирования

- **II блок – Анализ математической корректности построенной математической модели**
- Весь спектр проблем носит сугубо математический характер и зачастую игнорируется исследователями. Многие опираются на «чутье», собственное представление о результате. Однако, такой путь весьма опасен, особенно для начинающих, что подтверждается многочисленными примерами мировой научно-технической практики.

Пример 1

Система 1:

$$1.0x_1 + 0.9x_2 = 1.9$$
$$0.9x_1 + 0.8x_2 = 1.7$$

Решение: $x_1 = x_2 = 1$

Система 2:

$$1.0x_1 + 0.9x_2 = 1.902$$
$$0.9x_1 + 0.8x_2 = 1.724$$

Решение: $x_1 = 3 \quad x_2 = -1.22$

Пример 1

Малое изменение в данных (столбец правой части)

$$\delta b = \begin{pmatrix} 0.002 \\ 0.024 \end{pmatrix}$$

Приводит к значительному изменению в решении

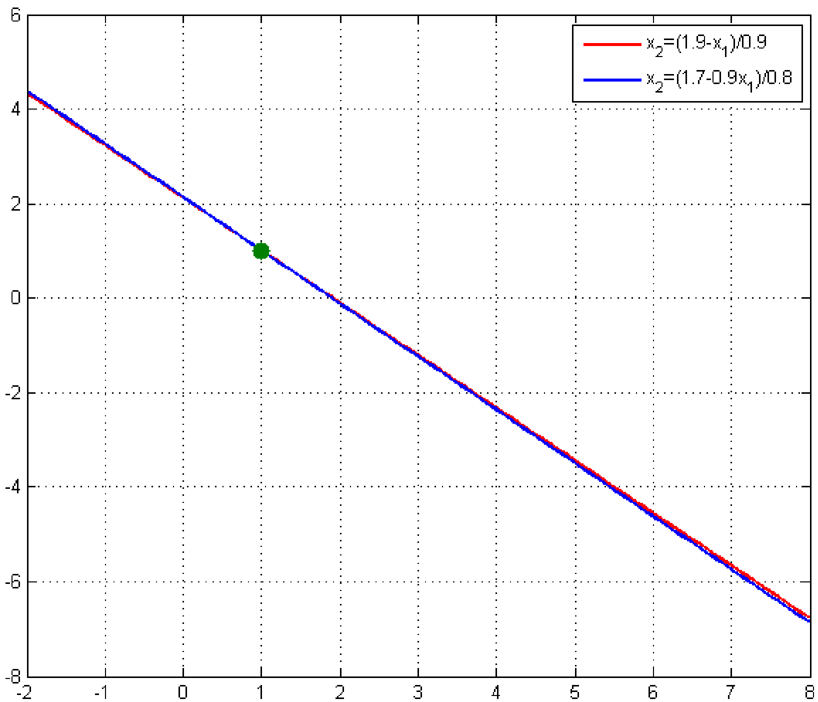
$$\delta x = \begin{pmatrix} 2.0 \\ -1.22 \end{pmatrix}$$

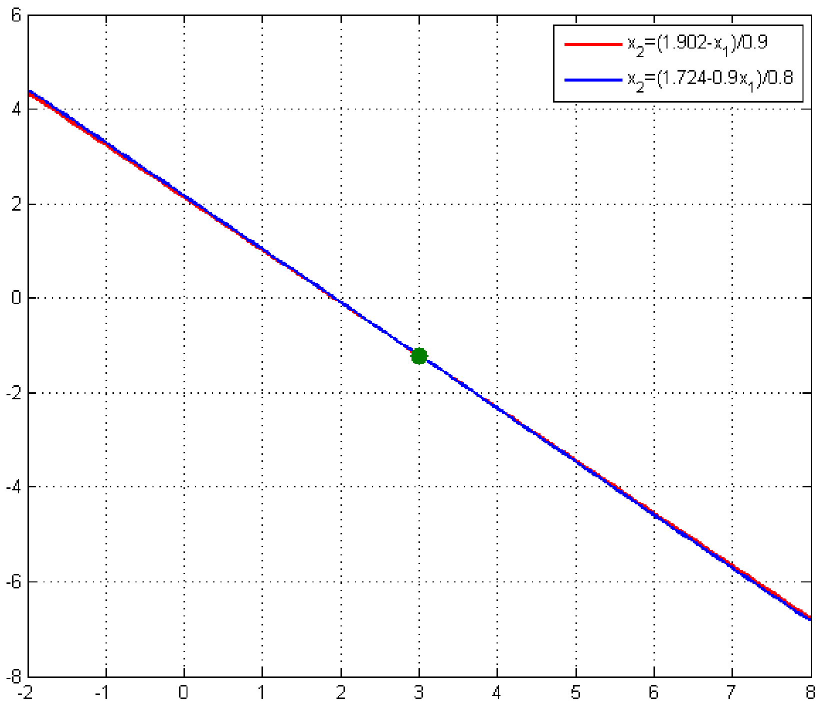
Почему это происходит?

Пример 1

Решение системы двух линейных уравнений находится как точка пересечения прямых

$$x_2 = (-1.0x_1 + 1.9)/0.9$$
$$x_2 = (-0.9x_1 + 1.7)/0.8$$



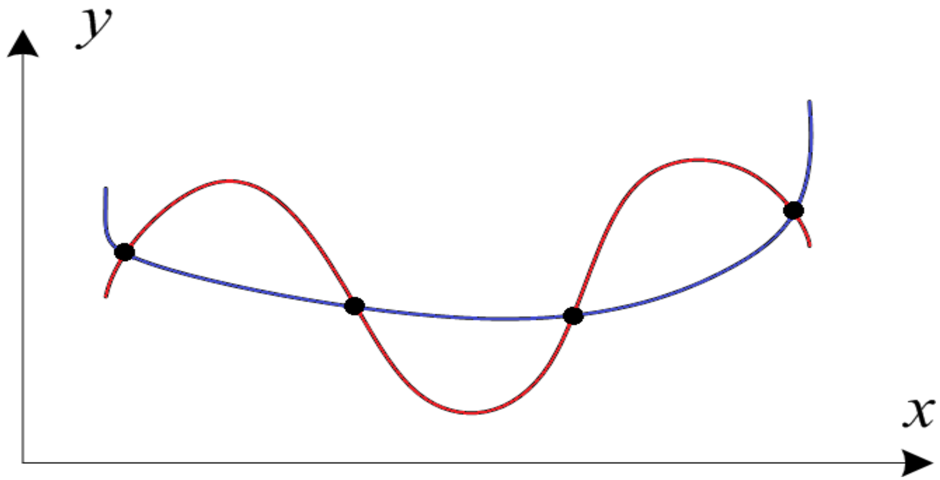


Решение проблемы корректности поставленной задачи

- обоснование существования решения (решений) в том или ином классе (векторов, функций, целых или вещественных чисел и т.д.)
- обоснование единственности решения
- исследование устойчивости решения по отношению к возмущению параметров задачи (в Примере 1 это возмущение правой части)

Пример 2

- Задача интерполяции по четырем заданным точкам



- Чтобы задача была корректна, необходимо ввести дополнительное условие, например, приближать данные полиномом фиксированной степени. Известно, что через четыре точки проходит единственная кривая $y = f(x)$, где $f(x)$ – полином третьей степени.

Современная Концепция математического моделирования

- **III блок – Переход от непрерывной математической модели к дискретной**
- Блок характерен для моделей, которые описываются дифференциальными и интегральными соотношениями
- При переходе от непрерывной модели к дискретной происходит подмена исходной задачи на новую, характеризующуюся одним или несколькими параметрами
- Пример –задача вычисления интеграла с помощью формул трапеций или Симпсона, параметр дискретизации N (число делений исходного отрезка) характеризует степень точности дискретного приближения.

Пример 3

- Задача Коши $y' = -y \quad x \in [0;1]$

$$y(0) = y_0 = 1$$

- Разделим отрезок на N частей $\Delta x = \dfrac{1}{N}$

$$x_i = \Delta x(i-1)$$

- Вычислительная процедура

$$y'(x_i) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_i + \Delta x) - y(x_i)}{\Delta x}$$

Пример 3

- Дифференциальное уравнение преобразуется в

$$y_{i+1} = y_i(1-\Delta x) \qquad i = 0,1,\dots,N-1$$

- С помощью начального условия получаем

$$y(1) = y_N = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N$$

$$y_N \xrightarrow[N\to\infty]{} e^{-1}$$

Современная Концепция математического моделирования

- **IV блок – Анализ математической корректности дискретной задачи**
- Здесь возникают те же проблемы, что и в блоке II, к которым добавляется еще одна задача – ответить на вопрос: будет ли при параметре $N \to \infty$ (или для совокупности таких параметров) дискретная задача, построенная в блоке III, стремиться к исходной непрерывной задаче?

Современная Концепция математического моделирования

- **V блок – Написание алгоритма для дискретной задачи и перенос его на вычислительную систему (программирование или кодирование)**

- **VI блок – Отладка программы (тестирование, получение результатов и их анализ).**

Литература

- Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва, “Наука”, 1989, 624 с.
- Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва, “Наука”, 1973. 408 с.
- Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва, “Наука”, 1989, 616 с.
- Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. — 2-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2001. — 320 с. — ISBN 5-9221-0120-X.